# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

---

TOME 5 — ANNÉE 1876

---

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1876, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

---

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

2451 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.
Quai des Augustins, 55.

# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME CINQUIÈME — ANNÉE 1876.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1876

(Tous droits réservés.)

# COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAITRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

**Sciences mathématiques.**

MM.
BERTRAND, de l'Institut.
BONNET, de l'Institut.
BOUQUET, de l'Institut.
BOURGET, Directeur des Études (Sainte-Barbe).
BRIOT, Prof. à la Sorbonne.
DARBOUX, Suppl. à la Sorbonne.
HERMITE, de l'Institut.
PUISEUX, de l'Institut.

**Sciences physiques.**

MM.
BALARD, de l'Institut.
BERTIN, Sous-Direct. de l'École Normale.
DEBRAY.
FRIEDEL, de l'École des Mines.
GERNEZ, Professeur au Lycée Louis-le-Grand.
SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri), de l'Institut.
TROOST, Prof. à la Sorbonne.

**Sciences naturelles.**

MM.
DELAFOSSE, de l'Institut.
DELESSE, Ingénieur en chef des Mines.
DES CLOIZEAUX, de l'Institut.
DE LACAZE-DUTHIERS, de l'Institut.
PASTEUR, de l'Institut.
PERRIER.
VAN TIEGHEM.

---

# ADMINISTRATION.

MM. H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE..... ..... *Directeur.*
BOURGET, Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. *Secrétaire.*
GERNEZ, Professeur au Lycée Louis-le-Grand..... ..... *Secrétaire-Adjoint.*

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1127-g

# RECHERCHES
SUR LA
# CRISTALLISATION DES SOLUTIONS SURSATURÉES,

PAR M. D. GERNEZ.

## DEUXIÈME MÉMOIRE.

### ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE PLUSIEURS CAUSES AUXQUELLES ON A ATTRIBUÉ LA CRISTALLISATION DES SOLUTIONS SURSATURÉES.

### I. — *Résumé du Mémoire précédent.*

Dans un premier Mémoire, consacré spécialement à l'étude des solutions sursaturées de sulfate et d'acétate de soude, j'ai démontré que le phénomène de la cristallisation subite de ces solutions, considérées entre des limites déterminées de température, dans l'explication duquel on avait fait intervenir tantôt la vapeur d'eau, tantôt l'air atmosphérique, ou bien une matière inconnue ou encore un état particulier des vases de verre qui les contiennent, ou même une force catalytique, doit être attribué au contact d'un cristal identique à ceux qui se déposent pendant la solidification subite de ces solutions, ou tout au moins isomorphe de ces cristaux, ce cristal pouvant du reste avoir des dimensions aussi petites qu'on voudra. J'ai fait voir en même temps

que les particularités capricieuses que présentent surtout les solutions sursaturées de sulfate de soude en présence de l'air tiennent à l'existence dans l'atmosphère de parcelles de cette substance. J'annonçais de plus que les solutions sursaturées quelconques présentent, avec des différences de détail, des propriétés analogues à celles qu'offrent le sulfate et l'acétate de soude.

II. — *Aperçu historique relatif aux réclamations de M. Ch. Viollette.*

Ces résultats furent attaqués à diverses époques par des savants dont je me propose de discuter les travaux dans le présent Mémoire. Je crois utile, avant d'aborder cet examen, de revenir sur un incident qui s'est produit à l'occasion de la publication de mon Mémoire dans les *Annales de l'École Normale,* 1re série, t. III, p. 167. M. Pasteur avait jugé utile de le faire précéder d'une Note historique dans laquelle il donnait connaissance d'une Correspondance qu'il avait échangée depuis 1863 avec M. Ch. Viollette, qui l'avait consulté sur des expériences relatives au sulfate de soude; il annonçait, de plus, qu'il avait conseillé à ce savant de prendre date, soit par un paquet cacheté adressé à l'Académie des Sciences, soit par une lecture faite à la Société des Sciences de Lille; et il jugeait que M. Ch. Viollette, ayant négligé de suivre ce conseil, avait perdu ses droits à la priorité. De mon côté, en effet, à la suite d'expériences faites au lycée de Dijon et au laboratoire de Talmay, que M. Thenard avait gracieusement mis à ma disposition, j'étais arrivé aux résultats que j'ai rappelés plus haut et que j'avais adressés à M. Pasteur avec prière de les présenter à l'Académie. Voici comment M. Pasteur s'exprime à ce sujet :

« Lorsque M. Gernez me fit part, au mois de mars 1865, de la conclusion très-précise à laquelle il était arrivé sans rien connaître des travaux de M. Viollette, je crus devoir écrire à ce dernier qu'une personne, dont je ne lui donnais pas le nom, m'avait prié d'être son interprète auprès de l'Académie, pour la publication de résultats intéressants sur les dissolutions sursaturées, et, sans rien confier à M. Viollette de la nature de ces résultats, je l'engageai à m'adresser une Note sur le même sujet, que je communiquerais également à l'Académie. En agissant ainsi, j'ai imité ce qui se passe à l'Académie toutes les fois

qu'un Membre s'empresse de donner connaissance de faits qui lui ont été annoncés confidentiellement, s'il arrive qu'une personne tierce vienne à publier occasionnellement ces mêmes faits [1]. »

Ainsi, au mois de mars 1865, époque à laquelle j'étais arrivé à une conclusion très-précise que j'adressais à l'Académie, M. Pasteur me proposait d'attendre, pour la présentation de mon travail, que M. Ch. Viollette fût prêt à publier le sien. J'avais bien évidemment le droit de faire connaître sans retard mes expériences, qui auraient eu ainsi une priorité incontestable; mais je m'en suis rapporté pleinement à M. Pasteur, et j'ai attendu, pour les publier, jusqu'à la fin du mois suivant (24 avril 1864), que M. Ch. Viollette fût en mesure de communiquer son travail.

Je pouvais raisonnablement espérer que cet acte de bonne confraternité et de déférence pour un savant plus âgé serait accueilli très-favorablement par M. Ch. Viollette: on va voir ce qu'il m'a valu. Mon Mémoire sur le sulfate et l'acétate de soude fut inséré dans le tome III des *Annales de l'École Normale;* immédiatement après fut imprimé celui de M. Ch. Viollette, dans lequel il n'est question ni de la Note historique de M. Pasteur, dont M. Ch. Viollette reconnaît pourtant avoir eu communication en épreuve, ni de réclamations relatives à mon Mémoire : ce n'est que l'année suivante que M. Ch. Viollette revint sur la question de priorité dans une brochure [2], dont j'ai eu seulement connaissance lors d'une distribution abondante qui en a été faite par son auteur à la session de l'Association française pour l'avancement des Sciences, tenue à Lille au mois d'août 1874.

Dans cet écrit, qui n'a pas les allures et le calme des discussions scientifiques ordinaires, l'auteur ne s'en rapporte plus à M. Pasteur sur la question de priorité, mais il parle beaucoup de ses expériences de 1860, grand travail en quatorze chapitres dont j'aurais donné un résumé « *aussi inexact qu'infidèle* » dans l'historique que j'ai inséré au commencement de mon Mémoire. Je ferai remarquer que M. Ch. Viollette n'a jamais publié que le *programme* de ce grand travail, et que,

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale,* 1re série, t. III, p. 164.

(2) *Études sur la sursaturation,* par M. Ch. Viollette, professeur-adjoint de Chimie à la Faculté des Sciences de Lille; Lille, 1867.

dans le résumé que j'en ai donné, j'ai scrupuleusement introduit l'énoncé *textuel* des seules conclusions qui s'y trouvent formulées. Je ne rentrerai pas, du reste, dans la discussion de ces expériences de 1860, car M. Ch. Viollette a désavoué depuis celles qui sont inexactes; et, pour ce qui est des autres, il est infiniment probable que, si elles avaient suffi à donner des conclusions précises, M. Ch. Viollette n'eût pas attendu cinq ans et l'appel réitéré de M. Pasteur pour les faire connaître.

Je n'examinerai qu'un paragraphe de l'écrit de M. Ch. Viollette, qui est pour le moins extraordinaire : « M. Gernez, dit-il, pour des raisons qu'il connaît sans doute, a préféré prendre une autre attitude; il établit une confusion entre mes résultats de 1860 et ceux de 1865; il rejette les faits que j'ai publiés en 1860 parce qu'ils n'ont pas reçu une publicité suffisante; il considère comme non avenus ceux qui sont publiés dans les *Comptes rendus de l'Académie*, et, pendant que mon Mémoire est déposé à l'Institut, attendant le jugement de la Commission, il répète des expériences consignées dans ce Mémoire, publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie*, et les fait paraître dans son Mémoire inséré dans les *Annales de l'École Normale* en son nom et comme étant sa propriété. » Ces accusations sont injustes; il y a plus, elles ne sont pas sérieuses : en effet, le Mémoire que j'ai publié dans les *Annales de l'École Normale* étant le développement des expériences qui faisaient l'objet de ma Note du 24 avril 1865, je n'avais évidemment le droit de parler dans l'historique de la question que des expériences publiées antérieurement à cette date, c'est-à-dire, en ce qui concerne M. Ch. Viollette, des expériences anciennes de 1860. Comment ce savant peut-il sérieusement me le reprocher, lui qui a fait exactement la même chose en ne citant pas seulement mon nom dans son Mémoire, ce dont je n'ai, du reste, jamais songé à me plaindre? Le reste est aussi léger : M. Ch. Viollette n'hésite pas à affirmer que j'ai publié *en mon nom et comme étant ma propriété* des expériences consignées dans le Mémoire présenté par lui à l'Académie le 24 avril 1865; mais comment aurais-je pu avoir connaissance de ces expériences? Est-ce par la Note qui a paru sous son nom dans le *Compte rendu*, le même jour que la mienne? Mais cette Note est un énoncé de résultats, elle ne contient pas la moindre description d'expériences. Est-ce par une Communication ultérieure et comprise entre cette date du 24 avril 1865 et la publication

de mon Mémoire? Mais, dans cet intervalle de temps, voici ce qui s'est passé, et c'est un point assez intéressant à connaître : les résultats auxquels j'étais parvenu, qui *comprenaient tous ceux annoncés le même jour par M. Ch. Viollette*, furent attaqués par des Membres de l'Académie et par divers autres savants, entre autres par un chimiste éminent de Lille, bien connu de M. Ch. Viollette. Je répondis immédiatement aux objections qui me furent faites en généralisant mes expériences, je signalai les causes d'erreur qui avaient pu égarer mes contradicteurs, je donnai l'explication de certains phénomènes déjà observés, et je fis connaître des résultats nouveaux; c'est à mon avis la seule manière sérieuse de faire qu'une polémique qu'on est obligé de subir ne soit pas stérile ([1]). Aussi l'opposition que mes expériences avaient rencontrée cessa peu à peu, et mes résultats furent assez généralement adoptés en France. Cependant M. Ch. Viollette se taisait, et, comme depuis il n'a jamais rien ajouté aux faits qu'il avait annoncés, je n'ai bien évidemment pu, dans cette période, rien lui emprunter. En 1866, mon Mémoire parut dans les *Annales de l'École Normale*, t. III, p. 167; celui de M. Ch. Viollette fut imprimé dans une livraison suivante; je n'ai donc pu en prendre connaissance que lorsque le mien était entièrement publié, de sorte que non-seulement je n'ai rien pris à M. Ch. Viollette, mais je ne pouvais rien lui prendre. J'ajouterai une remarque importante dans cette discussion, c'est qu'en lisant le travail de M. Ch. Viollette j'ai éprouvé un sentiment de surprise qui sera, je pense, partagé par tous ceux qui liront nos deux Mémoires et qui pourraient s'attendre à y trouver des ressemblances : c'est qu'en effet, bien qu'ils conduisent aux mêmes résultats, tout y est différent : méthode, séries d'expériences, appareils et expériences de contrôle avec une sub-

---

([1]) Voici les titres des diverses Notes que j'ai communiquées à l'Académie dans cette période :

*Nouvelles études sur les dissolutions sursaturées* (*Comptes rendus*, t. LX, p. 1027, 15 mai 1865);

*Sur les causes d'erreur que présente l'étude des dissolutions sursaturées* (*Comptes rendus*, t. LXI, p. 71, 10 juillet 1865);

*Additions à des Notes précédentes sur la cristallisation des solutions sursaturées* (*Comptes rendus*, t. LXI, p. 289, 14 août 1865);

*Sur les solutions sursaturées* (*Comptes rendus*, t. LXI, p. 847, 14 novembre 1865).

*Sur les phénomènes de surfusion* (*Comptes rendus*, t. LXIII, p. 217, 30 juillet 1866).

stance autre que le sulfate de soude. Il y a plus, si l'on s'en tient aux expériences décrites par M. Ch. Viollette, les conclusions qu'il en tire ne s'imposent pas malgré leur exactitude, et c'est peut-être à cette circonstance qu'il faut attribuer le peu d'empressement que l'auteur dit avoir mis à les faire connaître.

C'est ainsi que tombent, pour ainsi dire d'elles-mêmes, les imputations de M. Ch. Viollette. Il me reste maintenant à demander pardon au lecteur de m'être si longuement étendu sur des considérations aussi personnelles. Je l'ai fait surtout pour montrer aux jeunes savants comment il peut arriver qu'on soit accusé de plagiat par des personnes envers lesquelles on n'a eu qu'un seul tort, celui de leur donner tout le temps nécessaire pour qu'elles puissent partager le mérite de la découverte d'un résultat nouveau qu'on était en droit de se conserver tout entier.

Je vais maintenant aborder, à un point de vue purement expérimental, la discussion des travaux les plus importants qui ont été publiés en opposition avec les résultats que j'ai fait connaître; j'indiquerai en même temps les expériences que j'ai entreprises pour lever les objections qui m'ont été faites et je donnerai quelques détails sur les résultats nouveaux auxquels je suis parvenu, et qui peuvent être considérés comme une conséquence ou une généralisation de mes premiers travaux.

### III. — *Origine du sulfate de soude de l'atmosphère.*

Je dois d'abord donner quelques détails sur l'origine du sulfate de soude dont j'ai démontré l'existence dans l'atmosphère. J'ai attribué la production de cette substance à l'action qu'exerce sur le sel marin l'acide sulfurique provenant de l'acide sulfureux qui est déversé dans l'atmosphère par la combustion des matières sulfurées et qui se transforme en acide sulfurique au contact de l'air humide. Pour donner une idée de la quantité d'acide sulfurique que l'on peut rapporter à cette origine, je rappellerai les résultats d'un calcul fait par M. Leplay en 1861. Suivant les appréciations de ce savant ingénieur, le soufre dégagé chaque année dans les usines du pays de Galles par la combustion des pyrites représente une valeur de 5 000 000 de francs; il se perd

annuellement dans l'air environ 46 000 000 de kilogrammes de soufre qui introduisent dans l'atmosphère 92 000 000 de kilogrammes d'acide sulfureux, représentant 141 000 000 de kilogrammes d'acide sulfurique monohydraté (1).

Si l'on ajoute aux produits de la combustion des pyrites ceux des houilles pyriteuses et les émanations volcaniques, on arrive à un total assez considérable pour rendre compte de la quantité d'acide sulfurique nécessaire à la production du sulfate de soude. D'un autre côté, si l'on réfléchit que la particule la plus ténue de sulfate de soude suffit pour qu'on puisse en manifester la présence à l'aide d'une solution sursaturée de cette substance, on pourra facilement admettre la dissémination du sulfate de soude dans l'atmosphère.

### IV. — *Action prétendue des solutions étendues sur les solutions sursaturées.*

J'examinerai en premier lieu les expériences publiées par M. Jeannel (2). Dans un prémier Mémoire, ce savant attribue la cristallisation subite des solutions sursaturées à des causes purement physiques : je vais passer en revue quelques-uns des points sur lesquels repose cette conclusion. D'abord il affirme que la solution ordinaire d'un sel fait cristalliser sa solution sursaturée. Cette proposition est en contradiction avec une expérience par laquelle Lœwel montre qu'un jet d'eau lancé dans une solution sursaturée ne la fait pas cristalliser (3), et avec le procédé que j'ai donné pour conserver à l'air une solution sursaturée contenue dans un ballon, procédé qui consiste à déposer avec précaution une mince couche d'eau à la surface de la solution qui remplit le ballon jusqu'à la naissance du col. Il ne serait pas nécessaire d'instituer des expériences spéciales pour démontrer qu'une solution sursaturée ou

---

(1) WAGNER, *Chimie industrielle*, t. I, p. 364.

(2) *Recherches sur les solutions salines sursaturées*, par le Dr Jeannel (*Comptes rendus*, t. LXI, p. 412, 8 septembre 1865). — *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. VI, p. 166, octobre 1865, et *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux*, 1865, p. 99.

(3) *Observations sur la sursaturation des dissolutions salines*, par M. Henri Lœwel (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXIX, p. 62, 1860).

non ne provoque pas la cristallisation d'une solution sursaturée : il suffit de considérer ce qui se passe dans tout ballon où l'on a fait bouillir une solution sursaturée. Pendant le refroidissement, la vapeur d'eau condensée sur les parois supérieures du ballon descend peu à peu vers la solution, et, comme elle a une densité moindre, elle se rassemble en une couche mince à sa surface, et y forme une solution non saturée parfaitement visible et qui ne se mélange qu'avec une extrême lenteur avec le liquide sursaturé, mais qui n'en provoque jamais la cristallisation. Du reste, si l'assertion de M. Jeannel était exacte, il serait impossible de déplacer une solution sursaturée sans la faire cristalliser; car au moindre mouvement le liquide vient au contact des parois qui sont toujours plus ou moins humides, et par suite se mélange avec une solution non sursaturée.

Devant l'affirmation de M. Jeannel, j'ai cru cependant devoir répéter son expérience, et, comme il l'indique, j'ai fait tomber dans une solution sursaturée de sulfate de soude une solution même saturée de ce sel jetée sur un filtre, et s'écoulant par la douille d'un entonnoir : le mélange des deux liquides s'est effectué sans provoquer la cristallisation; il m'a suffi, pour réussir l'expérience, de laver au préalable la surface extérieure de l'entonnoir avec de l'eau distillée.

Des expériences analogues, faites avec des solutions d'alun, de sulfate de zinc et d'acétate de plomb, m'ont donné les mêmes résultats.

### V. — *Influence prétendue de la grandeur de la surface des parois en contact avec le liquide sur la cristallisation.*

M. Jeannel attribue à la surface plus ou moins considérable des parois en contact avec le liquide une influence sur la cristallisation. Ainsi une petite quantité de liquide étalée sur une surface très-grande de verre n'y cristalliserait plus. J'ai déjà fait voir directement [1] que dans des tubes de verre dont la surface avait été rendue 20 et 30 fois plus grande, par l'introduction de fragments de verre, les solutions sursaturées de sulfate de soude se comportent de la même manière, quel que soit le rapport de la surface baignée par la solution à la quan-

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1re série, t. III, p. 202.

tité de liquide. Il n'y a donc pas lieu de supposer que les parois exercent sur le sel dissous *une attraction particulière qui retarderait ou empêcherait* la cristallisation.

J'arrive à la question de l'influence des poussières atmosphériques : il résulte de mon premier Mémoire que *les solutions des substances dont il n'existe pas de parcelles en suspension dans l'atmosphère peuvent y séjourner indéfiniment sans cristalliser.*

Des ballons contenant de l'alun, du sulfate de zinc, de l'acétate de plomb, cristallisent, suivant M. Jeannel, « très-peu de temps après qu'on les a découverts, dans des lieux où il est absurde de supposer que peuvent voltiger des parcelles de ces différents sels ». Relativement à la solution sursaturée d'alun, j'ai annoncé (¹) qu'elle peut rester longtemps dans des vases ouverts sans cristalliser; j'ai conservé à la campagne des ballons où cette solution est restée liquide plus d'un mois. Il n'en est pas de même dans les lieux habités et les laboratoires, où cette substance se rencontre souvent, soit qu'on la dissémine pendant les manipulations auxquelles on la soumet, soit qu'elle provienne de diverses sources, par exemple des opérations de la teinture, ou qu'elle résulte de l'action de l'acide sulfurique atmosphérique sur les éléments alcalins et terreux du sol.

Les autres solutions dont il s'agit se conservent bien plus longtemps; j'ai déjà signalé celles d'acétate et d'hyposulfite de soude, que j'ai gardées, pendant plus de six mois, dans des ballons ouverts à col incliné, sans qu'il y eût cristallisation. J'ajouterai que les solutions de sulfate de zinc et d'acétate de plomb sont dans le même cas; mais il faut pour cela qu'elles ne soient pas refroidies au-dessous des limites où cesse la sursaturation : c'est ainsi que la solution sursaturée d'acétate de plomb se solidifie lorsque la température descend au-dessous de 13 degrés.

Enfin, contrairement aux assertions de M. Jeannel, le contact d'un corps solide sec ou humide ne détermine jamais la cristallisation, à moins qu'il n'amène dans la solution sursaturée une parcelle identique aux cristaux qui se produisent lorsqu'elle cristallise subitement, ou tout au moins un cristal isomorphe.

---

(¹) *Comptes rendus*, t. LXI, p. 73.

Ainsi les assertions présentées par M. Jeannel, en opposition avec les résultats que j'ai annoncés, sont en contradiction avec l'expérience. Avant d'aborder la discussion d'un second Mémoire du même auteur, je crois devoir rappeler que j'avais signalé en détail les causes d'erreur que présente l'étude des solutions sursaturées et qui rendent souvent les expériences illusoires; j'avais indiqué particulièrement avec quelle facilité un observateur, même soigneux, dissémine autour de lui les petits cristaux dont il s'agit, surtout lorsqu'il opère sur des substances efflorescentes, cristaux dont le seul contact suffit pour provoquer la cristallisation des solutions sursaturées de même nature. J'avais fait voir qu'en prenant toutes les précautions possibles je trouvais toujours du sulfate de soude dans les lieux habités, plus rarement de l'alun et de l'azotate d'ammoniaque; mais nulle part je n'avais admis qu'il y eût, d'une manière normale, en tous les points de l'atmosphère ni même en quelques points, des cristaux de toutes les substances en nombre considérable dont on peut préparer des solutions sursaturées. C'est là une assertion que M. Jeannel a eu la légèreté de produire sous mon nom, dont il a fait un système qu'il a décoré du nom de *Pancristallie atmosphérique*, et qu'il a combattu fort sérieusement ([1]). Non-seulement je n'ai pas affirmé l'existence normale dans l'atmosphère de toutes les substances cristallisées, mais j'ai démontré que les solutions sursaturées d'acétate et d'hyposulfite de soude et une foule d'autres peuvent être exposées aux poussières de l'atmosphère sans présenter le phénomène de la cristallisation subite.

VI. — *Explication des effets de l'évaporation sur les solutions sursaturées.*

Il est un phénomène qui semble à M. Jeannel être en contradiction formelle avec les faits que j'ai établis : c'est qu'une goutte d'une solution sursaturée donne par l'évaporation, soit spontanément, soit sous l'influence de la chaleur, des cristaux tout différents de ceux que détermine le contact de la solution par une parcelle cristalline du sel dissous. Comment se fait-il, par exemple, qu'une goutte d'une solution

([1]) *Nouvelles études sur les solutions salines sursaturées et critique de la Pancristallie*, par le Dr Jeannel (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 37, 2 janvier 1866, et *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux*, 1865, p. 157).

de sulfate de soude abandonnée à l'évaporation sur une lame de verre ne donne pas les mêmes cristaux que ceux qui se déposent dans un ballon exposé à l'air libre? C'est ce que nous allons expliquer. Si, au lieu d'une goutte de liquide, on évapore à l'air, sur une lame de verre, la même quantité de liquide étalée en couche très-mince, elle présentera à l'air une grande surface, et il y aura beaucoup plus de chances pour qu'une parcelle de sulfate de soude à 10HO en provoque la cristallisation à la manière ordinaire. Il arrivera souvent, au contraire, qu'un cristal de sulfate de soude ne tombe pas sur une goutte isolée, laquelle ne présentera pas alors le phénomène de la cristallisation subite.

Dans le cas où la couche liquide n'est pas rencontrée par une parcelle cristalline de la substance dissoute, il peut se produire un fait remarquable à la fois, parce qu'il est constant et parce qu'on l'observe en employant un grand nombre de solutions sursaturées : la solution étalée sur une surface relativement grande se concentre par évaporation si l'air n'est pas humide, devient rapidement sursaturée si elle ne l'était pas, et elle se trouve bientôt à la fois assez concentrée et assez froide pour donner lieu à la production spontanée de cristaux d'un hydrate de sulfate de soude différent par son aspect et sa composition de l'hydrate ordinaire à 10HO et dont la formule est $NaOSO^3\ 7HO$. Cet hydrate, mis au contact de la solution sursaturée, n'y détermine jamais la formation de cristaux à 10HO; il peut au contraire, comme nous le verrons plus loin, si la solution est suffisamment concentrée, faire naître des cristaux à 7HO [1].

Il en est de même pour la solution d'alun que l'on abandonne à l'évaporation, et qui n'est pas touchée par un cristal d'alun ordinaire; elle se concentre peu à peu, assez pour abandonner des cristaux moins hydratés, qui se produisent aussi spontanément dans les solutions concentrées. L'acétate de soude et le sulfate de magnésie se comportent de la même manière. Ce sont des cristallisations de ce genre que M. Jeannel a obtenues en évaporant des gouttes liquides présentant à l'air trop peu de surface pour être facilement rencontrées par des poussières cristallines

---

[1] On peut donc, contrairement à une assertion de M. Ch. Viollette (*Annales de l'École Normale*, 1re Série, t. III, p. 213) facilement observer la production de ces cristaux à l'air libre, à la seule condition d'opérer, par exemple, hors des habitations et, en général, des lieux où les parcelles de sulfate de soude ne sont pas abondamment disséminées.

de même nature, qui en provoqueraient la cristallisation subite. Ce que l'auteur n'a pas aperçu, c'est que ces solutions, qui se conservent indéfiniment liquides dans l'air humide, lorsqu'on les protége de la chute des poussières de même nature, donnent dans l'air sec des cristaux qui sont, comme je viens de l'expliquer, différents par leur composition de ceux qui prennent naissance lors de la cristallisation subite de ces solutions. On voit donc par là que, parmi les expériences de M. Jeannel, celles qui sont exactes s'interprètent très-facilement et ne présentent aucune contradiction avec les résultats que j'ai annoncés et qui ont été depuis assez généralement adoptés en France.

## VII. — *De l'action prétendue des lames minces liquides sur les solutions sursaturées.*

### 1° CAS DES SOLUTIONS CONCENTRÉES.

En Angleterre, M. Tomlinson, Membre de la Société royale de Londres, fit paraître sur les solutions sursaturées une série de Mémoires annonçant des faits qui étaient en opposition complète avec mes expériences. Je citerai, par exemple, le fait suivant : on dépose une goutte d'huile fixe ou volatile à la surface d'une solution sursaturée de sulfate de soude. Si elle s'étale en couche mince, il y a cristallisation; si elle prend la forme d'une lentille, il n'y a pas cristallisation; mais si, par un choc particulier, on écrase les globules sur les parois, il y a cristallisation [1]. Dans un Mémoire ultérieur, l'auteur essaye de rattacher ce fait à l'adhérence plus ou moins grande des corps sur la solution; suivant lui, « un corps purifié adhère au sel plus fortement que la partie liquide, et il en résulte une séparation [2] ». Il se propose de démontrer « qu'une substance active est celle qui est souillée d'une matière étran-

---

[1] *On the motions of certain liquids on the surface of water*, by Ch. Tomlinson (*Philos. Mag.*, 4e série, t. XXXIX, p. 32, 1870). — *On supersaturated saline solutions*, by Ch. Tomlinson (*Philos. Transact. for* 1868, p. 659, et *Philos. Mag.*, 4e série, t. XXXVI, p. 222 et 241, 1868).

[2] *On supersaturated saline solutions*, by Ch. Tomlinson (*Philos. Mag.*, 4e série, t. XL, p. 211, septembre 1870, Part II, et *Philos. Transact. for* 1871, p. 52).

gère, et que l'état de pellicule est nécessaire à l'adhésion qui rend le corps noyau (c'est-à-dire actif); car l'expérience montre qu'une huile qui n'est pas noyau sous forme de lentille ou de globule le devient à l'état de pellicule ».

A l'appui de cette proposition, il fait connaître des expériences réalisées sur l'éther, l'alcool absolu, le naphte, la benzine, les essences de térébenthine, de cajeput et autres essences, les huiles de baleine, de hareng, d'olive, de lin, de castor et autres huiles fixes d'origine animale ou végétale, qui donneraient les résultats annoncés non-seulement avec les solutions sursaturées de sulfate de soude, mais aussi avec celles des aluns de potasse et d'ammoniaque, d'acétate de soude et de sulfate de magnésie. Suivant l'auteur, l'huile n'aurait pas, sous forme de lentille, un contact assez intime avec la solution pour en provoquer la cristallisation; sous forme de pellicule, au contraire, elle serait assez adhérente pour déterminer le phénomène. Appliquant cette idée à ce qui se passe à l'air libre, l'auteur n'hésite pas à attribuer dans ce cas la cristallisation subite des solutions sursaturées « aux poussières de l'atmosphère qui agiraient en vertu d'une pellicule dont elles sont couvertes. »

M. Archibald Liversidge [1] attaqua ces résultats dans un travail où il fit voir que, contrairement à une assertion de M. Tomlinson, le sulfate de soude à 10 équivalents d'eau fait toujours cristalliser la solution sursaturée de cette substance, et que de plus les huiles fixes ou volatiles peuvent s'étaler avec pellicule sur les solutions sursaturées sans en provoquer la cristallisation. Ce savant vérifia aussi, comme je l'avais annoncé, que divers corps dont il fit l'essai sur la solution sursaturée de sulfate de soude pouvaient y être introduits sans la faire cristalliser, et il conclut de ses expériences que « la présence du sulfate de soude dans l'air ne serait pas surprenante. »

Cependant M. Tomlinson avait reconnu que les propositions que j'ai indiquées plus haut n'avaient pas la généralité absolue qu'il leur avait attribuée et, dans son dernier Mémoire, il avait indiqué qu'une solution d'huile de citronelle dans l'éther s'étendait en couche mince sur la so-

---

[1] *On supersaturated saline solutions*, by Archibald Liversidge (*Proceedings of the royal Society*, t. XX, p. 497, 20 juin 1872).

lution sursaturée de sulfate de soude sans la faire cristalliser. Pour expliquer cette difficulté, il essaya de rattacher l'explication de ses expériences à une théorie de certains phénomènes capillaires développée par M. van der Mensbrugghe, dont les recherches intéressantes sur la capillarité lui semblèrent de nature à éclairer la question. Il s'associa donc à ce savant pour la publication de la troisième partie de ses recherches sur les solutions salines sursaturées ([1]). Ce Mémoire, publié dans le *Philosophical Magazine,* fut envoyé à l'Académie des Sciences de Paris par M. van der Mensbrugghe, avec le résumé suivant ([2]) :

« Nous avons pour but de prouver par l'expérience les quatre propositions suivantes :

» 1° Une solution sursaturée, contenue dans un vase parfaitement débarrassé de toute matière grasse, demeure liquide aussi longtemps que sa surface libre ou la surface en contact avec les parois du vase ne subit pas, en un ou plusieurs points, une diminution notable de la tension superficielle.

» 2° Si l'on dépose à la surface d'une solution sursaturée une goutte de liquide à faible tension, cette goutte s'étale et provoque la cristallisation, soit immédiatement, soit au bout de quelques minutes.

» 3° Tandis qu'un liquide à faible tension produit la solidification au bout d'un temps plus ou moins court, un liquide doué d'une grande force contractile et n'agissant pas chimiquement sur la solution peut être amené en contact avec celle-ci sans la faire changer d'état.

» 4° De même qu'un liquide à faible tension fait cristalliser la solution sursaturée, de même un solide couvert d'une couche plus ou moins épaisse d'un pareil liquide détermine la cristallisation subite ou graduelle. »

Quant aux circonstances dans lesquelles les liquides donnent une lentille ou une pellicule, elles se trouvent indiquées dans le Mémoire en ces termes : « Si une goutte d'un liquide B, à tension superficielle $b$, est déposée à la surface d'un autre liquide A à tension superficielle $a$,

---

([1]) *On supersaturated saline solutions,* Part III. — *On a relation between the surface-tension of liquids and the supersaturation of saline solutions,* by Ch. Tomlinson and G. van der Mensbrugghe (*Philos. Mag.*, 4e série, t. LXIV, p. 223, 1872).

([2]) *Sur les solutions salines sursaturées,* par MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe. (*Comptes rendus,* t. LXXV, p. 254, 29 juillet 1872).

la goutte formera membrane si l'on a $a > b + c$, $c$ étant la tension de la surface commune des liquides A et B, mais, si l'on a $a < b + c$, la goutte prendra la forme de lentille. »

Les propositions que je viens de rappeler étaient en contradiction formelle avec les résultats que j'avais publiés antérieurement, dont j'avais eu l'occasion de vérifier bien des fois l'exactitude, et en vertu desquels des corps de nature quelconque ne pouvaient provoquer la cristallisation des solutions sursaturées, dans des limites déterminées de température, qu'à la condition d'amener au contact de ces solutions une parcelle cristalline identique ou isomorphe. Je crus donc devoir répéter le système d'expériences sur lesquelles MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe faisaient reposer leur théorie nouvelle, et je vais entrer dans quelques détails sur cette étude expérimentale [1].

Je me suis attaché à deux des quatre conclusions de leur Mémoire, qui seules se prêtent à des expériences donnant un résultat positif, et qui ont été formulées en ces termes :

« 1° Si l'on dépose à la surface d'une solution sursaturée une goutte d'un liquide à faible tension superficielle, cette goutte s'étale et provoque la cristallisation, soit immédiatement, soit au bout de quelques minutes.

» 2° De même qu'un liquide à faible tension fait cristalliser la solution sursaturée, de même un solide couvert d'une couche plus ou moins épaisse d'un pareil liquide détermine la cristallisation subite ou graduelle. »

Les solutions sursaturées qu'ils employaient étaient particulièrement celles de sulfate de soude; ils ont quelquefois fait usage de solutions d'acétate de soude, d'alun de potasse, d'alun ammoniacal et de sulfate de magnésie ; quant aux liquides à faible tension superficielle qu'ils amenaient à la surface de ces solutions, c'étaient le plus souvent des huiles fixes ou volatiles, d'origine végétale ou animale. Je me suis astreint à répéter scrupuleusement les expériences qui ont conduit leurs auteurs aux conclusions précédentes, et je vais indiquer seulement les principaux résultats auxquels je suis parvenu.

---

[1] *Note relative à l'action prétendue des lames minces liquides sur les solutions sursaturées* (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1705, 16 décembre 1872).

Avec le sulfate de soude, j'ai fait une solution sursaturée contenant 2 parties de sel à 10 équivalents d'eau pour 1 partie d'eau; je l'ai introduite, après filtration, dans des ballons à col incliné, n'ayant jamais servi, que j'avais passés à l'acide sulfurique et lavés plusieurs fois à l'eau distillée; j'ai attendu jusqu'au lendemain pour procéder aux essais. A la surface de la solution froide, j'ai déposé une goutte des liquides suivants : essences de térébenthine, de citron, d'orange, de romarin, de cajeput, de lavande, d'anis; huiles d'olive, de lin, d'amandes douces, de ricin, de foie de morue, de poisson; pétrole, benzine, créosote, alcool vinique et alcool méthylique : en tout dix-huit substances, que j'ai essayées chacune dans trois ballons distincts. Tous ces liquides se sont étalés à la surface des solutions, sous forme d'une pellicule présentant, avec un grand éclat, les couleurs des lames minces à l'exception de la créosote, dont la pellicule se déformait rapidement sur les bords, et des alcools vinique et méthylique, qui donnaient une couche mince très-fugitive, et toutes les solutions sont restées limpides. Ainsi, sur *cinquante-quatre* ballons essayés et dans lesquels j'ai observé la pellicule qui, suivant MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe, provoque toujours la cristallisation, il ne s'en est pas trouvé *un seul* où il y ait eu cristallisation de la solution sursaturée de sulfate de soude, et, huit jours après, les ballons étaient encore dans le même état.

J'ai réalisé la même expérience avec l'acétate de soude, l'alun de potasse, l'alun ammoniacal, le sulfate de magnésie, auxquels j'ai joint l'hyposulfite de soude et le tartrate double de potasse et de soude. J'ai préparé des solutions sursaturées de ces substances contenant 2 parties de sel pour 1 partie d'eau distillée, je les ai introduites dans des ballons nettoyés avec soin, et je les ai touchées avec chacun des dix-huit liquides indiqués ci-dessus : dans toutes, j'ai observé la production d'une pellicule mince; mais, dans ce total de *cent huit* essais, il n'y a pas eu *une seule* fois cristallisation de la solution sursaturée, ni immédiatement, ni après dix jours. Je crois donc pouvoir conclure de ces expériences que les lames minces des liquides indiqués, auxquelles on attribuait une action élective sur les particules salines, sont absolument insuffisantes pour déterminer la cristallisation des solutions salines sursaturées, soit immédiatement, soit au bout d'un temps quelconque.

Pour contrôler l'autre proposition relative à l'action des corps solides

sur les solutions sursaturées, j'ai frotté avec de l'huile d'olive dix-huit baguettes de verre, que j'ai ensuite plongées dans des solutions sursaturées d'acétate de soude, d'hyposulfite de soude et de tartrate double de potasse et de soude; elles ont produit une lame mince colorée, à la surface de la solution; mais, dans aucun cas, il n'y a eu de cristallisation immédiatement ou ultérieurement. J'ai essayé aussi avec les mêmes solutions, et par groupes de six, dix-huit baguettes de verre qui depuis plusieurs mois avaient séjourné au milieu d'un laboratoire de Chimie, et aucune d'elles n'a provoqué la cristallisation. Ainsi la conclusion relative à l'action des corps solides sur les solutions salines sursaturées n'est, pas plus que la première, d'accord avec les faits ; il n'y a donc pas lieu à une théorie fondée sur la tension superficielle des lames liquides.

Comment se fait-il que des observateurs aussi consciencieux que MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe aient pu être victimes d'une illusion aussi complète? C'est ce que je vais essayer d'indiquer sommairement. J'ai établi que certaines solutions salines peuvent se conserver indéfiniment, à l'état de sursaturation, entre des limites déterminées de température, tant qu'elles ne sont pas rencontrées par une parcelle, si petite qu'elle soit, de la matière dissoute au même degré d'hydratation ou d'un corps isomorphe. J'ai fait voir de plus que dans l'air flottent normalement des parcelles de sulfate de soude, très-rares dans l'air de la campagne, mais très-abondamment répandues dans les laboratoires, surtout lorsqu'on expérimente sur cette substance qui donne par l'efflorescence une poussière extrêmement ténue. Il résulte de là que tous les liquides qui ne dissolvent pas cette substance en contiennent des traces, si les vases qui les renferment ont été débouchés sans des précautions spéciales : les liquides dont on s'est servi sont précisément dans ce cas.

Il importe aussi de ne jamais laisser les ballons qui contiennent la solution au libre contact de l'air, sans protéger leur ouverture contre la chute de parcelles salines. En prenant quelques précautions commandées par ces deux circonstances, on arrive assez facilement à éviter l'accès de ces poussières, dont une quantité pour ainsi dire infiniment petite suffit pour solidifier la solution sursaturée. Par exemple, si l'on opère sur les solutions sursaturées de sulfate de soude, on peut

rendre inactives les parcelles cristallines de cette substance tenues en suspension dans les liquides dont on se propose d'essayer l'action ; en chauffant ces liquides très-peu de temps dans des tubes à une température supérieure à 33 degrés, le sulfate de soude devient alors anhydre et sans action sur la solution sursaturée, puis on maintient ces tubes inclinés suivant un angle de 25 à 30 degrés, de manière que les poussières atmosphériques ne puissent tomber à l'intérieur jusqu'au voisinage du liquide. Les solutions sursaturées de sulfate de soude se conservent facilement, comme je l'ai démontré depuis longtemps, dans des tubes ou des ballons ouverts dont le col est incliné ; pour amener une goutte de liquide à la surface des solutions, on peut se contenter de puiser ce liquide avec un tube capillaire très-fin récemment chauffé et conservé à l'abri des poussières de l'air dans un vase humide. Si l'on a soin d'éviter de rencontrer les parois des vases avec ce tube capillaire, de ne plonger que sa pointe d'abord dans le liquide, puis dans la solution sursaturée, et enfin de ne l'employer qu'une seule fois, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une disposition expérimentale plus compliquée pour obtenir d'excellents résultats.

Ces précautions, indispensables dans les expériences sur le sulfate de soude et aussi sur les aluns, dont la dissémination est presque comparable à celle du sulfate de soude, seraient superflues dans le cas des autres sels qui n'existent dans l'atmosphère que lorsqu'on les y met, s'il n'arrivait presque toujours qu'on dissémine pendant les opérations ces substances, dont les poussières flottent dans l'atmosphère qui entoure l'expérimentateur. C'est sans doute pour n'avoir pas tenu suffisamment compte de ces causes d'erreur que MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe ont été conduits à attribuer aux liquides une action qui n'était due qu'aux particules cristallines qu'ils tenaient en suspension dans le cas où la cristallisation était immédiate, et aux poussières cristallines disséminées dans l'air, dans le cas où le phénomène de la cristallisation n'apparaissait que plus tard et quand on opérait dans des vases ouverts. Du reste, on s'explique facilement comment il se fait qu'avec des liqueurs non débarrassées de germes cristallins on observe que la cristallisation est assez souvent immédiate lorsque la goutte du liquide introduit s'étale en pellicule à la surface de la solution sursaturée, tandis qu'elle peut être plus lente dans le cas où la goutte prend

la forme d'une lentille. En effet, dans le premier cas, le liquide introduit est en contact par une très-grande surface avec la solution, et, s'il contient des parcelles salines, il y a de grandes chances pour qu'elles viennent immédiatement toucher la solution sursaturée dont elles provoqueront la cristallisation. Dans le second cas, au contraire, le contact, qui du reste est moins intime, n'a lieu que par une surface relativement très-petite, et il pourra se passer longtemps avant que la parcelle cristalline en suspension dans le liquide vienne toucher la solution sursaturée.

La publication de ces expériences provoqua bientôt une réponse de M. van der Mensbrugghe, qui fit connaître comment il avait été amené à s'occuper de cette question : « Après avoir réfléchi, dit-il, aux faits nombreux relatifs à la cristallisation des solutions sursaturées, j'ai conçu l'idée que ces faits pouvaient avoir une connexion intime avec le jeu des forces contractiles des liquides mis en présence; n'ayant pas le temps de m'occuper moi-même de la partie expérimentale, je soumis mes vues à M. Tomlinson, en les formulant dans quatre propositions destinées à être contrôlées par de nouvelles expériences; j'indiquai, de plus, les essais qui me paraissaient de nature à bien établir la connexion dont il s'agit. M. Tomlinson eut la bonté de se mettre aussitôt à l'œuvre, soit pour refaire quelques-unes de ses expériences antérieures, soit pour en exécuter de nouvelles [1]. » Il résulte de là que M. van der Mensbrugghe s'en est rapporté pleinement aux expériences de M. Tomlinson, dont il ne songe pas à suspecter l'exactitude, et qu'il n'est responsable que de la théorie qu'il a proposée pour les expliquer. Il reconnaît de plus que les expériences n'ont pas été toutes d'accord avec cette théorie, et il n'accepte pas que j'aie pu regarder les conclusions que j'ai rappelées plus haut comme ayant un caractère qui ne laissait place à aucune ambiguïté. Il m'oppose ensuite des expériences faites avec l'huile de phoque, l'huile de spermacéti, l'huile de graine de coton et l'huile niger sur des solutions sursaturées de concentration faible contenant des poids égaux de sulfate de soude et d'eau et me reproche de n'avoir pas donné la valeur des tensions su-

[1] *Réponse à une Communication précédente de M. Gernez, intitulée : « Note relative à l'action prétendue des lames minces liquides sur les solutions sursaturées »*, par M. van der Mensbrugghe (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 45, 6 janvier 1873).

perficielles des solutions que j'ai employées. Il termine en attribuant la cristallisation de la solution sursaturée par un cristal de sulfate de soude à une pellicule dont ce cristal serait couvert, tandis qu'il serait par lui-même inactif à l'état de pureté.

M. Ch. Viollette intervint alors dans le débat (1) : sans apporter à la discussion aucune expérience nouvelle, il conseilla à MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe de répéter les expériences qu'il avait publiées dans le tome III des *Annales de l'École Normale*, p. 224, leur assurant que les liquides dont ils s'étaient servis, et dont cependant il ne dit pas avoir jamais fait usage, ne provoquaient pas la cristallisation de la solution sursaturée de sulfate de soude. Il les engagea aussi à refaire, selon les indications de son Mémoire, l'expérience de la cristallisation de la solution sursaturée de sulfate de soude par le contact d'un cristal de cette substance, dont il affirma l'efficacité sans donner la raison de l'insuccès de M. Tomlinson.

Cette raison fut donnée peu après par M. de Coppet (2), qui montra l'illusion dans laquelle était tombé M. Tomlinson en prenant sans vérification pour des cristaux de sulfate de soude ordinaire les cristaux du sel à 7HO qui se déposent au sein des solutions très-concentrées, en laissant le reste du liquide à l'état de sursaturation, comme Ziz l'avait observé en 1815.

Le point capital de la réponse de M. van der Mensbrugghe était, comme on l'a vu plus haut : 1° que j'avais opéré sur des solutions à tension superficielle faible, autrement dit sur des solutions trop concentrées; 2° que je n'avais pas expérimenté sur les huiles de phoque, de spermacéti, de graines de coton et niger. Je crus que le seul moyen de mettre fin au débat était de répéter les expériences indiquées par mon honorable contradicteur et dans les conditions mêmes où son collaborateur avait opéré; je vais donner le résumé de ces expériences (3).

---

(1) *Action des lames minces liquides sur les solutions sursaturées. Réponse aux Communications précédentes de MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe*, par M. Ch. Viollette (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 171, 20 janvier 1873).

(2) *Observations relatives aux récentes Communications de MM. D. Gernez et G. van der Mensbrugghe sur les causes qui font cristalliser les solutions sursaturées*. Note de M. L.-C. de Coppet (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 432, 17 février 1873).

(3) *Nouvelles observations relatives à l'action prétendue des lames minces liquides sur les solutions sursaturées* (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 566, 3 mars 1873).

### 2° CAS DES SOLUTIONS SURSATURÉES ÉTENDUES.

Dans des ballons contenant la solution sursaturée formée de poids égaux de sulfate de soude et d'eau, j'ai introduit une goutte des dix-huit substances essayées déjà sur des solutions plus concentrées, et aucune d'elles, après s'être étalée en lame mince, n'a provoqué la cristallisation. De plus, ayant reçu de Londres des échantillons d'huile de phoque, de graines de coton et de spermacéti, que je n'avais pu me procurer à Paris lors des expériences précédentes, j'ai constaté sur la solution contenant poids égaux de sel et d'eau, et aussi sur des solutions plus concentrées, qu'elles n'ont pas plus d'efficacité que les autres substances.

Pour donner plus de force à la démonstration, j'ai préparé en outre deux séries de solutions sursaturées moins concentrées encore, contenant, pour 100 parties d'eau, l'une 90 parties de sulfate de soude, et l'autre 75 parties du même sel. Ces solutions étant maintenues à la température de $+6°$, où il y avait sursaturation, j'ai essayé les vingt et une substances précédentes étalées en lame mince, et je n'ai *pas une seule fois* constaté la cristallisation subite de la solution. Ces soixante-trois essais, tous concordants, prouvent qu'il faut encore abandonner la proposition restreinte de M. van der Mensbrugghe, et admettre que les liquides qui s'étalent en lame mince à la surface des solutions sursaturées de sulfate de soude de concentration quelconque n'en déterminent jamais, par un effet de capillarité, la cristallisation subite.

Pour ce qui est des solutions sursaturées des autres sels, tels que l'acétate et l'hyposulfite de soude, les aluns de potasse et d'ammoniaque, le sulfate de magnésie et le tartrate double de potasse et de soude, leur étude conduit aux mêmes résultats que celle des solutions de sulfate de soude. Il n'y a pas lieu, d'après cela, d'entrer dans la discussion de la théorie proposée par M. van der Mensbrugghe, puisqu'elle repose sur des expériences inexactes; cependant j'ai cru ne devoir pas négliger de déterminer la valeur des tensions superficielles de plusieurs des solutions que j'avais employées : j'ai trouvé, pour valeurs des tensions superficielles des solutions d'hyposulfite de soude et de sel de Seignette, les nombres 8,67 et 8,76, qui sont supé-

rieurs à 5,1, valeur attribuée par MM. van der Mensbrugghe et Tomlinson à la tension du sulfate de soude; d'où il suit que les expériences que j'ai indiquées contredisent davantage encore la théorie fondée sur la considération de la tension superficielle.

Toutes ces expériences sont d'une netteté parfaite et d'une grande facilité d'exécution, pour peu qu'on soit en garde contre l'accès des poussières cristallines de la substance dissoute; mais, comme elles exigent qu'on prenne quelques précautions pour écarter ces parcelles infiniment petites, je crois utile de signaler un sel dont les solutions sursaturées peuvent être manipulées sans qu'il soit nécessaire de prendre la moindre précaution spéciale : c'est l'azotate de chaux cristallisé pur, qui n'existe pas dans l'air et dont les cristaux déliquescents ne peuvent y séjourner sans absorber rapidement la vapeur d'eau atmosphérique et se dissoudre. En ajoutant quelques gouttes d'eau aux cristaux d'azotate de chaux et faisant chauffer [1], on obtient une solution sursaturée que l'on peut transvaser à froid, verser sur une plaque de verre comme du collodion photographique, ou abandonner pendant des mois entiers dans des ballons largement ouverts, dont le col est dressé verticalement, sans qu'il y ait cristallisation; j'en ai conservé ainsi du 8 janvier au 10 avril, c'est-à-dire 92 jours, après lesquels la solution était encore sursaturée.

J'ai touché une solution sursaturée d'azotate de chaux avec les vingt et une substances indiquées précédemment; elles se sont étalées en lames minces à sa surface, sans provoquer une seule fois la cristallisation, et pourtant cette solution sursaturée était dans les conditions les plus favorables pour cristalliser, puisque sa tension superficielle avait pour valeur 10,04 :

$$\frac{r}{2} = 0^{mm},198, \quad h = 29^{mm}, \quad d = 1,748.$$

Il résulte de ces diverses expériences qu'il n'y a aucune relation entre la tension superficielle des liquides et la cristallisation subite des

---

[1] Il faut éviter de concentrer la solution par évaporation, car on obtiendrait par refroidissement un dépôt cristallisé d'azotate de chaux moins hydraté, qui joue, par rapport au sel à 4HO, le même rôle que les cristaux de sulfate de soude à 7HO, relativement au sulfate ordinaire à 10HO.

solutions sursaturées à un degré quelconque de concentration, et qu'il n'y a pas lieu de cesser d'attribuer ce phénomène, comme je l'ai démontré, au contact d'une parcelle cristalline du corps dissous ou d'un corps isomorphe.

Pour ce qui est de l'assertion de MM. Tomlinson et van der Mensbrugghe, que le sulfate de soude pur à 10 équivalents d'eau ne provoquerait pas la cristallisation de la solution sursaturée, nous avons vu qu'elle repose sur une erreur manifeste d'expérience, que M. de Coppet a indiquée. A ce propos, M. Ch. Viollette, qui avait jugé depuis longtemps que ce point méritait un examen expérimental particulier, a réclamé (1), comme nous l'avons vu, une priorité que moins que personne je songeais à lui contester. En effet, dans une solution sursaturée de sulfate de soude, chacun sait que la cristallisation, une fois commencée en un point de la masse, continue par l'adjonction de nouveaux cristaux aux cristaux de sulfate de soude qui viennent de se produire, jusqu'à ce que la solution, quel qu'en soit le volume, ait abandonné l'excédant de la quantité de sel dissous sur la quantité qui y est retenue normalement en dissolution. Si les cristaux de sulfate de soude pur étaient inactifs, il est clair que la cristallisation serait purement locale et ne pourrait pas se propager d'un bout à l'autre de la masse liquide.

A la suite de cette Communication, M. van der Mensbrugghe adressa à M. le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences une Lettre dans laquelle il annonçait que, « ayant acquis la conviction formelle que la tension superficielle des liquides ne joue pas dans la cristallisation des solutions sursaturées le rôle important qu'il avait cru pouvoir assigner à cette force, en partant des longues recherches de M. Tomlinson, il priait l'Académie de regarder comme non avenues les Communications qu'il lui avait adressées à ce sujet (2). » Cette démarche spontanée d'un savant qui met la vérité scientifique au-dessus de toute question d'amour-propre fait le plus grand honneur à l'élévation de son caractère. Elle a mis fin au débat de ce côté.

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 171.

(2) *Lettre relative à la cristallisation des solutions sursaturées*; par M. G. van der Mensbrugghe (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 874, 7 avril 1873).

VIII. — *Influence nulle de l'agitation des solutions sursaturées de sulfate de soude et d'alun en présence d'autres liquides. Examen des dernières expériences de M. Tomlinson.*

Quant à M. Tomlinson, il publia dans le *Philosophical Magazine* une nouvelle Note (1) dans laquelle, sans mettre explicitement en doute l'exactitude de mes expériences, il déclara que je prouverais très-difficilement que les cristallisations subites qu'il avait observées étaient dues à la présence de parcelles salines, et il publia une série d'expériences nouvelles dans lesquelles il déterminait la cristallisation des solutions sursaturées de sulfate de soude et d'alun par l'agitation très-brusque et très-violente du liquide avec une goutte d'huile qui s'écrase contre les parois. Dans ces expériences, l'auteur, mettant à profit les objections tirées de l'intervention des corps étrangers, évite les poussières atmosphériques en bouchant les vases qui contiennent la solution; il opère en plein air, à la campagne, avec des huiles qui n'ont pas séjourné dans un laboratoire, et, malgré ces soins, il trouve que plusieurs fois des gouttes d'huile d'amandes douces, de bergamotte, de lavande, d'olive, etc., déposées sur le liquide, puis agitées brusquement, le font cristalliser. Je ferai d'abord remarquer que, de l'aveu de l'auteur, ces expériences ne réussissent pas à coup sûr; de plus, si l'on examine attentivement les conditions dans lesquelles le phénomène se produit, on ne trouve rien de surprenant : on voit, en effet, que M. Tomlinson ne s'est pas mis en garde contre les matières que les huiles peuvent tenir en suspension. Or j'ai démontré (2) que les huiles du commerce contiennent le plus souvent des parcelles de sulfate de soude qui proviennent de l'atmosphère où cette matière se rencontre normalement; il peut donc arriver que la goutte d'huile que l'on prélève pour l'expérience contienne une parcelle de sulfate de soude, et alors voici ce qui doit arriver : si la goutte s'étale en lame mince, la parcelle saline vient facilement en contact avec la solution sursaturée et en détermine

(1) *Note on supersaturated saline solutions*, by Ch. Tomlinson (*Proceedings of the Royal Society*, 13 march 1873, et *Philos. Mag.*, 4e série, t. XLV, p. 385).

(2) *Sur les causes d'erreur que présente l'étude des dissolutions sursaturées* (*Comptes rendus*, t. LXI, p. 71, 10 juillet 1865).

immédiatement la cristallisation; si, au contraire, la goutte forme lentille, il peut se faire que la parcelle de sulfate de soude reste en son intérieur et, dans ce cas, il n'y aura pas cristallisation; mais si, par une agitation brusque, on divise l'huile en gouttelettes très-fines ou si on l'écrase contre la paroi avec une baguette, de manière à amener à la surface extérieure les parties intérieures de la goutte, la parcelle saline pourra venir au contact de la solution sursaturée, dont elle provoquera la cristallisation. Il en est de même pour les expériences faites avec l'alun, dont il existe toujours des parcelles dans l'atmosphère des lieux habités. Ainsi s'expliquent facilement les résultats obtenus par M. Tomlinson. On n'observe rien de pareil, même après les secousses les plus brusques et l'agitation la plus violente, lorsqu'on prend le soin d'enlever aux huiles la très-petite quantité de matières salines qu'elles contiennent; il suffit pour cela de les agiter pendant quelques minutes avec de l'eau distillée ou encore de les chauffer à une température qui peut ne pas dépasser 34 degrés lorsqu'il s'agit du sulfate de soude.

C'est ce qui résulte des expériences suivantes : j'ai fait une solution sursaturée de sulfate de soude contenant 2 parties de sel et 1 partie d'eau, que j'ai introduite dans quinze ballons; j'ai amené à la surface du liquide des gouttes de créosote et des huiles de térébenthine, de lavande, d'amandes douces, d'olive et de lin, préalablement chauffées; j'ai ensuite écrasé avec une baguette de verre ces gouttes contre les parois, et je n'ai pas une seule fois déterminé la cristallisation subite de la solution. Pour essayer l'effet de l'agitation du liquide, j'ai introduit la solution sursaturée chaude dans des tubes de verre que j'ai ensuite étirés à la lampe, en ne laissant qu'une ouverture par laquelle j'ai fait arriver jusqu'à la solution refroidie une goutte d'huile au moyen d'un tube capillaire, puis j'ai fondu à la lampe l'extrémité effilée du tube et j'ai soumis les solutions à l'agitation la plus violente. J'ai opéré ainsi sur deux séries de tubes contenant les huiles que M. Tomlinson a signalées comme étant les plus efficaces : huiles d'amandes douces, de bergamotte, de lavande, d'olive, de romarin et de colza, en tout douze expériences, et je n'ai observé dans aucun des tubes la cristallisation de la solution.

Pour augmenter l'effet de la secousse, j'ai introduit au préalable,

dans cinq tubes pareils, des fragments de verre à cassure très-irrégulière, et, après mille secousses, il n'y a pas eu davantage cristallisation de la solution.

Quinze expériences exécutées de même avec une solution sursaturée contenant 8 parties d'alun et 3 d'eau distillée, selon les proportions indiquées par M. Tomlinson, et les mêmes huiles que précédemment, ont conduit au même résultat négatif.

Il faut donc, d'après cela, renoncer à expliquer la cristallisation subite de ces solutions sursaturées par l'effet d'une secousse violente communiquée au liquide en présence de gouttelettes d'huile.

Je crois avoir démontré, par ce qui précède, que les diverses hypothèses faites successivement pour expliquer la cristallisation subite des solutions sursaturées ne résistent pas à l'épreuve de l'expérience, et qu'on ne peut se refuser à admettre que ce phénomène est déterminé, dans des limites données de température, par une parcelle de même composition que les cristaux qui se déposent pendant la solidification ou par un cristal isomorphe.

## IX. — *Action du sulfate de soude effleuri sur les solutions sursaturées de sulfate de soude.*

J'ai dit plus haut qu'à la suite de la publication de mes expériences, dans lesquelles j'avais démontré que les lames minces liquides sont sans influence sur la cristallisation des solutions sursaturées, M. Ch. Viollette était intervenu dans le débat pour rappeler ses expériences et présenter une réclamation de priorité à laquelle il me mettait en demeure, je ne sais pourquoi, de répondre : elle était relative, en effet, à l'application qu'il a faite, pour l'étude des solutions sursaturées de sulfate de soude, d'un appareil que M. Pasteur avait imaginé à l'occasion de ses mémorables recherches sur les générations dites *spontanées*. Je répondis que je n'avais jamais contesté que M. Ch. Viollette eût fait usage de cet appareil, et j'ai ajouté que je ne m'en étais jamais servi moi-même dans mes recherches, par la raison que j'avais pu arriver immédiatement, par des dispositions beaucoup plus simples, à des ré-

sultats très-satisfaisants et tout à fait définitifs, tandis que M. Ch. Viollette, après s'être servi de l'appareil très-compliqué dont il s'agit et à la date de 1860 qu'il invoquait, prétendant que « la question était décidée et résolue alors par une méthode rigoureuse », avait annoncé comme seule conclusion de ses expériences (1) « qu'il se pourrait bien que la substance qui détermine la cristallisation des solutions sursaturées agît comme un corps avide d'eau », tel que la chaux et la baryte, résultat dont l'inexactitude avait été prouvée par mes expériences avant qu'elle eût été reconnue par M. Ch. Viollette lui-même.

Ces remarques donnèrent lieu à une nouvelle réclamation de M. Ch. Viollette, que je vais reproduire (2) : « Je ferai remarquer, dit-il, que M. Gernez établit, en terminant sa Note du 3 mars dernier, une confusion entre mes recherches de 1860 et celles qui font l'objet d'un Mémoire étendu, présenté à l'Académie le 24 avril 1865, par M. Pasteur, en même temps que les premiers essais de M. Gernez sur le même sujet.

» Je n'avais pas attendu ces premiers essais de M. Gernez pour reconnaître l'inexactitude de certains résultats relatifs à la chaux et à la baryte, présentés par moi « comme réclamant de nouvelles recherches » avant de pouvoir en affirmer l'exactitude », et non point comme des faits certains, ainsi que M. Gernez semble le croire. Au 24 avril 1865, j'avais établi que, indépendamment d'un abaissement de température de 8 degrés au-dessous de zéro, la sursaturation du sulfate de soude cesse, dans toutes les circonstances où on l'observe, par l'introduction dans les liqueurs d'un cristal de sulfate de soude appartenant à l'espèce chimique, *sulfate de soude à* 10 *équivalents d'eau*, et non point par une parcelle de *sulfate de soude effleuri ou non*, comme l'affirmait M. Gernez à cette époque, parce que j'avais établi que le sulfate de soude complétement effleuri, c'est-à-dire ne contenant plus l'espèce chimique sulfate de soude à 10 équivalents d'eau, est impuissant à provoquer la cristallisation. »

Sans revenir sur la question de priorité, que j'ai traitée plus haut, me

---

(1) *Mémoires de la Société des Sciences de Lille*, 2e série, t. VII, p. 185, 1860.

(2) *Observations à propos d'une Note récente de M. Gernez, sur les solutions salines sursaturées;* par M. Ch. Viollette (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 713, 17 mars 1873).

sera-t-il permis de faire remarquer que le travail présenté le 24 avril 1865 à l'Académie, et que M. Ch. Viollette appelle complaisamment *mes premiers essais*, contient au moins tous les résultats qui figurent dans son *Mémoire étendu*, et que ces essais ont été suivis d'un certain nombre d'autres qui ont agrandi la question et fait connaitre des résultats nouveaux, tandis que M. Ch. Viollette en est toujours resté à ce premier Mémoire? Je crois plus utile de considérer au point de vue expérimental la Note que je viens de reproduire. L'auteur relève comme une erreur de ma part cette affirmation que le *sulfate de soude effleuri ou non* fait cristalliser la solution sursaturée de cette substance; il dit au contraire « avoir » établi dans son Mémoire que le sulfate de soude complétement effleuri est impuissant à provoquer la cristallisation. J'ai vainement cherché dans le Mémoire de M. Ch. Viollette les expériences relatives au sulfate de soude effleuri : il ne s'en trouve pas une seule. Par un procédé peu conforme aux vraies méthodes d'investigation scientifique, cet auteur, au lieu de soumettre du sulfate de soude à l'efflorescence et d'examiner ce qui en résulterait, a supposé que, dans ces conditions, le sel perdait la totalité de l'eau qu'il contient, c'est-à-dire devenait anhydre, et, comme le sel rendu anhydre sous l'influence de la chaleur est inactif, il en a conclu que le sulfate de soude effleuri est lui-même inactif.

L'expérience conduit, comme je l'avais annoncé le 24 avril 1865, à un résultat qui est en contradiction avec le raisonnement de M. Ch. Viollette. Si l'on expose, dans un milieu parfaitement sec et pendant un temps très-long, une couche extrêmement mince de sulfate de soude à 10 équivalents d'eau, on peut facilement constater que le contact d'une parcelle de la poussière de ce sulfate de soude provoque immédiatement la cristallisation. Sans insister ici sur les détails d'expériences directes que l'on trouvera plus loin, je rappellerai les termes suivant lesquels j'avais déjà insisté sur les propriétés des sels effleuris : « Le sulfate de soude à 10 équivalents d'eau s'effleurit à l'air, et l'on pouvait se demander si dans cet état il conservait sa propriété; j'ai donc exposé dans de l'air absolument sec des baguettes recouvertes d'une couche extrêmement mince de sulfate de soude. Après huit jours, j'ai essayé ces baguettes, et toutes ont provoqué la cristallisation. Pour l'acétate de soude, les résultats sont les mêmes; les sels anhydres ou

moins hydratés sont tout à fait inactifs, et le sel effleuri jouit des mêmes propriétés que l'acétate ordinaire $NaOC^4H^3O^3 6HO$ [1] ».

J'avais aussi entrepris quelques expériences en vue de rechercher s'il était possible d'enlever au sulfate de soude, par une exposition suffisamment prolongée dans une atmosphère parfaitement sèche, les dernières traces d'eau qu'il retient, et je poursuivais cette étude lorsque M. de Coppet, reproduisant une expérience semblable à celle que je viens de rappeler, crut pouvoir admettre que le sulfate de soude effleuri était bien anhydre, et, comme le sulfate déshydraté par la chaleur au-dessus de 33 degrés a perdu la propriété de faire cristalliser la solution sursaturée de sulfate de soude, tandis que le sulfate de soude effleuri conserve cette propriété, M. de Coppet jugea cette différence suffisante pour affirmer l'existence de deux variétés isomériques de sulfate de soude anhydre [2]. Sitôt que j'eus connaissance de cette Communication, je rappelai les résultats que j'avais publiés antérieurement sur le même sujet, et j'indiquai ceux auxquels j'étais parvenu depuis [3].

J'avais d'abord reconnu que le sulfate de soude à 10 équivalents d'eau, exposé pendant quelques jours à la température de 10 à 15 degrés, peut ne conserver que 1 millième au plus de l'eau qu'il contient. J'ai voulu essayer d'enlever la totalité de cette eau en la faisant séjourner très-longtemps dans l'air tout à fait sec. A cet effet, je me suis servi de baguettes de verre dont j'ai recouvert l'extrémité d'une couche très-mince de sulfate de soude ordinaire. Il suffisait pour cela de les mouiller avec une solution sursaturée et de la faire cristalliser ensuite; j'obtenais ainsi une couche dont l'épaisseur était d'environ $\frac{1}{10}$ de millimètre. Chaque baguette traversait un bouchon qui pouvait être ajusté très-exactement sur le col d'un flacon rempli au tiers d'acide sulfurique concentré. Dans l'atmosphère sèche du flacon, dont la température a varié de 10 à 25 degrés, la couche de sulfate de soude blanchissait rapidement. Tous les mois, je retirais plusieurs de ces baguettes, je les introduisais au-dessus de solutions sursaturées de sulfate

---

(1) *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. III, p. 200, 1866.

(2) *Sur l'existence de deux modifications isomériques du sulfate de soude anhydre.* Note de M. L.-C. de Coppet (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 194, 19 janvier 1874).

(3) *Sur quelques particularités relatives à l'efflorescence des deux hydrates formés par le sulfate de soude* (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 283, 26 janvier 1874).

de soude ; puis, par une légère secousse communiquée à la baguette, je faisais tomber quelques grains de la poussière blanche du sulfate effleuri, et immédiatement la solution cristallisait, donnant, quelle que fût la concentration, des cristaux à 10 équivalents d'eau. Une pellicule extrêmement mince de sulfate de soude, après un séjour prolongé pendant neuf mois et demi dans l'air parfaitement desséché, n'avait pas perdu la propriété de produire des cristaux ayant sa forme originelle, si petite que fût la quantité employée. J'ajouterai que, l'expérience ayant été prolongée depuis le 10 avril 1873 jusqu'au 27 janvier 1875, le sel effleuri a conservé son activité. Au contraire, on sait que le même sulfate de soude, chauffé pendant quelques minutes au delà de 33 à 34 degrés, température à laquelle le sel devient anhydre, est tout à fait inactif.

M. de Coppet tire de ce fait la conclusion qu'il y a deux modifications isomériques du sulfate de soude anhydre, celle dont l'existence est admise par tous les chimistes et qu'on produit au delà de 33 degrés, et celle qu'on réalise, suivant lui, en desséchant le sulfate de soude ordinaire, au-dessous de cette température. Cette conclusion n'est nullement une conséquence nécessaire de l'expérience. En effet, en admettant, comme je l'ai démontré, qu'une quantité infiniment petite d'une substance suffise pour faire cristalliser sa solution sursaturée, la cristallisation par le sel effleuri est expliquée si l'on suppose qu'il reste dans ce sel une quantité du sulfate ordinaire non encore transformé, aussi petite qu'on voudra l'imaginer, quantité qu'il est impossible de déceler par l'emploi de la balance ou autrement.

Voici une expérience qui me semble de nature à éclaircir cette question délicate : j'ai reconnu qu'une solution très-concentrée de sulfate de soude contenant, par exemple, 2 parties de sel et 1 partie d'eau, peut être conservée sans cristalliser lorsqu'on opère à une température de 10 à 12 degrés; si l'on y sème un cristal pur de sulfate de soude à 7 équivalents d'eau, il ne se développe dans la solution que cette espèce de sel, et le reste du liquide contient encore assez de sulfate de soude pour constituer une solution sursaturée [1].

---

[1] Cette expérience, qui est d'une réalisation facile, prouve l'inexactitude de l'assertion de M. Ch. Viollette, qui regarde les solutions de sulfate de soude comme ne pouvant pas être « sursaturées pour ce sulfate à 7 équivalents d'eau » (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. III, p. 213).

Or, si l'on réalise la même expérience avec le même sulfate à 7 équivalents d'eau, abandonné au préalable en couche très-mince dans l'air sec pendant plusieurs mois, auquel cas il ne peut conserver qu'une quantité d'eau trop faible pour être appréciée à la balance, on trouve que cette poudre produit immédiatement, dans la solution concentrée, des cristaux à 7 équivalents d'eau seulement. Ce résultat peut s'expliquer comme les précédents si l'on admet qu'il est impossible d'enlever par dessiccation, au-dessous de 33 degrés, les dernières traces d'eau du sulfate de soude, et qu'il reste une quantité infiniment petite de sel non déshydraté, laquelle est toujours suffisante pour provoquer la formation de cristaux identiques.

Avec le mode de raisonnement de M. de Coppet, il faudrait ou bien admettre l'existence d'une troisième modification isomérique du sulfate de soude anhydre produite par dessiccation, au-dessous de 33 degrés du sel à 7HO, ou bien, si l'on ne veut pas admettre l'existence de cette modification nouvelle, supposer que le sulfate de soude à 7HO donne par dessiccation, au-dessous de 33 degrés, le même sel anhydre que l'on n'obtient avec le sel à 10HO qu'à la condition de le chauffer au delà de 33 degrés, ce qui est assez invraisemblable.

Il est un dernier point sur lequel je désire appeler l'attention : c'est le mode d'action sur les solutions sursaturées du sel anhydre obtenu par l'action de la chaleur. Ce sel, amené au contact d'une solution concentrée, y provoque, non pas immédiatement, mais au bout de quelque temps, la production de cristaux à 7HO.

Ce fait s'explique facilement : lorsqu'on opère sur une solution de sulfate de soude entre certaines limites de température, qui sont $+33^{\circ}$ et $-8^{\circ}$ environ, on peut obtenir, soit par refroidissement, soit par évaporation, une solution de plus en plus concentrée; alors la concentration peut être suffisante pour que le contact d'une parcelle saline à 7HO dépose des cristaux de même composition. Si la concentration augmente, par exemple à 8 degrés, pour la solution qui contient les $\frac{2}{3}$ de son poids de sel ordinaire, les cristaux à 7HO se déposent spontanément, et, si l'on continuait à concentrer la solution, ils seraient seuls à se produire (à moins que la température ne descendît vers $-8^{\circ}$, auquel cas le sel à 10HO se formerait spontanément dans la solution restante). Ainsi le seul hydrate dont les cristaux se déposent spontané-

ment aux températures comprises entre $+33^\circ$ et $-8^\circ$ environ a pour composition $NaOSO^3 + 7HO$. Ce même sel est aussi celui qui se forme par l'hydratation du sulfate anhydre, lorsqu'on le met au contact de l'air saturé de vapeur d'eau. Je me suis assuré, en effet, que le sulfate de soude anhydre, obtenu en chauffant au rouge sombre le sel ordinaire dans un petit ballon dont le col était ensuite retourné dans un vase plein d'eau, fixe peu à peu la vapeur d'eau et donne des cristaux qui ne produisent jamais, dans les solutions sursaturées, de cristaux à $10HO$, et font naître au contraire dans ces solutions concentrées des cristaux à $7HO$.

Il en est de même lorsqu'on amène au contact d'une solution sursaturée concentrée du sulfate de soude anhydre obtenu par l'action de la chaleur sur le sel ordinaire ; mais l'effet n'est pas instantané : il y a d'abord transformation du sel anhydre en sel à $7HO$ par absorption d'eau, puis action sur la solution sursaturée et formation de cristaux ayant la même composition.

On voit ainsi que les phénomènes rappelés par M. de Coppet peuvent s'expliquer simplement, sans qu'il soit nécessaire d'admettre l'existence de plusieurs modifications isomériques du sulfate de soude anhydre. J'ajouterai que j'ai observé des particularités analogues avec les solutions concentrées de divers sels, tels que l'azotate de chaux, l'hyposulfite de soude, etc.

On voit, par ce qui précède, que j'attribuais l'action du sulfate de soude effleuri à une parcelle de sulfate de soude non déshydraté, qui suffit, comme nous l'avons vu, à provoquer la cristallisation de la solution sursaturée. M. de Coppet fit, peu de temps après la publication des expériences précédentes, deux objections à cette manière de voir [1]. « On connaît, dit-il, la facilité avec laquelle l'hydrate $Na^2SO^4$, $10H^2O$ s'effleurit. Comment se représenter alors les germes de sulfate de soude suspendus dans l'atmosphère, conservant indéfiniment, même par un temps sec et chaud, l'élément cristallin de sel à 10 atomes d'eau, qui seul, suivant M. Gernez, leur permet d'agir sur la solution sursaturée? Si

---

[1] *Observations relatives à la dernière Communication de M. Gernez, sur l'efflorescence des deux hydrates formés par le sulfate de soude anhydre.* Note de M. L.-C. de Coppet (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 498, 16 février 1874).

l'on connaissait la valeur numérique de la tension de dissociation de l'hydrate $Na^2SO^4$, $10H^2O$, telle qu'elle a dû être déterminée par M. Debray (*Comptes rendus*, t. LXVI, p. 194), on pourrait calculer les conditions atmosphériques (état hygrométrique et température), dans lesquelles la déshydratation du sel doit s'effectuer. Lorsque la tension de dissociation de l'hydrate n'est que très-peu supérieure à la tension de la vapeur d'eau existant dans l'atmosphère, la décomposition pourra être très-lente; mais il est inconcevable (dans l'état actuel de nos connaissances sur la dissociation) que tôt ou tard elle ne prenne pas fin. »

On peut répondre à cette objection que, si, comme je l'ai démontré plus haut, une couche très-mince de sulfate de soude peut rester pendant des années dans l'air desséché par l'acide sulfurique sans perdre la propriété de faire cristalliser la solution sursaturée, il en sera *a fortiori* de même des germes de sulfate de soude en suspension dans l'atmosphère, qui n'y sont jamais exposés à l'air parfaitement sec. Pour ce qui est de la dissociation des sels hydratés, nos connaissances se réduisent à ce qu'a publié M. Debray, qui n'a rien démontré relativement aux dernières traces d'eau qu'un sel peut retenir.

« Autre considération, ajoute M. de Coppet : chacun admet que, lorsque la température de l'air s'élève au-dessus de 33 degrés, la poussière de sulfate de soude doit perdre le pouvoir de faire cristalliser la solution sursaturée. Comment l'acquiert-elle de nouveau? Suivant M. Gernez, de deux manières seulement : par le contact avec un cristal de $Na^2SO^4$, $10H^2O$ déjà constitué, ou par un abaissement de température jusqu'à 8 degrés au-dessous de zéro. La première de ces conditions sera difficilement réalisable, et la seconde pourra se faire longtemps attendre. » D'abord je ferai remarquer que la température de 33 degrés n'est guère fréquente et qu'elle ne se manifeste qu'en un petit nombre de points de la surface du sol dont la température est toujours relativement basse, sauf aux points directement exposés aux rayons solaires. Pour ce qui est des germes de sulfate de soude qui seraient déshydratés par la chaleur, ils se comporteraient comme les autres corps solides en suspension dans l'atmosphère; ceux qui n'auraient pas été portés à une température supérieure à 33 degrés agiraient seuls sur les solutions sursaturées. C'est même peut-être à cette cause qu'il fau-

drait attribuer la présence plus fréquente de ces germes de sulfate de soude dans les endroits habités qu'en rase campagne.

Plutôt que de renoncer aux deux variétés isomériques de sulfate de soude anhydre, M. de Coppet aime mieux admettre l'existence de la troisième variété que je lui proposais, celle qu'on obtient en laissant pendant quelques jours dans un milieu sec une couche très-mince de sulfate de soude à 7HO, qui s'effleurit aussi très-facilement, et dont le contact produit immédiatement dans les solutions concentrées des cristaux à 7HO.

Admettant cette troisième modification isomérique, M. de Coppet ne s'est pas aperçu qu'il est obligé d'en admettre bien d'autres. En effet, j'ai indiqué plus haut que le fait dont je viens de parler n'est pas particulier au sulfate de soude, qu'il présente un certain caractère de généralité, et que je l'ai observé avec les solutions sursaturées de chromate neutre de soude, d'azotate de chaux, d'hyposulfite de soude, etc. Il faudrait donc admettre, d'après les idées de M. de Coppet, qu'il y a autant de variétés isomériques de sel anhydre qu'il y a d'hydrates différents de chacun de ces sels; car chacun d'eux, exposé dans un milieu sec où il perd à un infiniment petit près la totalité de son eau d'hydratation, conserve la propriété de produire dans les solutions sursaturées des cristaux de même composition et de même forme qu'avant la déshydratation.

Pour l'acétate de soude, l'hyposulfite et l'azotate de chaux par exemple, j'ai reconnu que l'on peut faire naître à volonté au moins deux hydrates différents dans des solutions convenablement concentrées, suivant qu'on sème une parcelle de l'un ou l'autre de ces hydrates effleuris ou non; il y aurait donc trois variétés isomériques de ces substances. Il en serait de même des solutions de chromate de soude.

Je crois qu'on admettra bien plus facilement que, exposées à la température ordinaire dans un milieu aussi sec que l'on voudra, ces substances ne perdent pas les dernières traces de l'eau qu'elles contiennent, et par suite qu'il reste une parcelle de l'hydrate primitif qui suffit, quelque petite qu'on la suppose, pour déterminer dans la solution sursaturée la formation de cristaux ayant à la fois sa forme et sa composition.

Il est, toutefois, une hypothèse bien plus séduisante que cette ex-

plication très-simple, et qui s'était depuis longtemps présentée à mon esprit : elle consiste à admettre que par l'efflorescence chaque molécule cristalline conserve sa charpente, quelle qu'en soit du reste la forme, de telle sorte que, les atomes d'eau se dégageant, leur place reste pour ainsi dire inoccupée jusqu'à ce que la molécule soit mise de nouveau en présence de l'eau qui vient alors reprendre sa place. S'agit-il d'une molécule de sulfate de soude à 7HO; lorsqu'elle a perdu par efflorescence l'eau qu'elle contient, elle ne peut en présence de l'eau absorber que 7HO et redonner la molécule primitive; de même la molécule de sulfate ordinaire à 10HO effleuri doit reprendre toute l'eau qu'elle a perdue. Cette hypothèse rendrait compte de tous les phénomènes observés; mais je n'ai pas réussi à instituer un système d'expériences dans lesquelles la cristallisation ne pût pas être plus simplement attribuée à l'action d'une parcelle infiniment petite ayant échappé à la déshydratation.

J'ai dit plus haut que les solutions qui présentent les particularités que je viens d'étudier sur le sulfate de soude sont assez nombreuses; je vais terminer ce Mémoire en appliquant les considérations que j'ai établies précédemment à l'explication de quelques-unes des particularités que présente l'étude des solutions sursaturées de borax [1].

## X. — *Propriétés des solutions sursaturées de borax.*

Depuis les observations de Payen et de Robiquet et Pellerin, on sait que le borax peut former avec l'eau deux hydrates contenant, l'un 5 équivalents d'eau et cristallisant en octaèdres réguliers, l'autre 10 équivalents et cristallisant en prismes rhomboïdaux obliques. On admet communément que les cristaux $NaO\,2BoO^3 + 5HO$ constituent une forme du borax stable seulement à une température relativement élevée, et que le sel $NaO\,2BoO^3 + 10HO$ est la forme stable à basse température, assimilant ainsi les deux variétés de borax aux formes dimorphiques

---

[1] *Sur les conditions de la formation du borax octaédrique* (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 68, 5 janvier 1874). — *Sur la transformation du borax octaédrique en borax prismatique* (*Bulletin de la Société philomathique*, t. XI, p. 7, 14 février 1874).

du soufre, des acides arsénieux et antimonieux, etc. *A priori* une pareille assimilation n'a pas de raison d'être, puisqu'il s'agit ici de deux corps ayant une constitution différente; mais on l'a étayée sur ce fait que la solution concentrée de borax donnerait par refroidissement, jusqu'à 56 degrés par exemple, d'autant plus de borax octaédrique qu'elle aurait été soumise plus longtemps à l'influence d'une température élevée. La chaleur déterminerait ainsi dans la dissolution la transformation moléculaire qui produirait le borax octaédrique. Le fait d'une transformation de ce genre, dans les substances qui présentent le dimorphisme, est assez fréquent pour qu'on l'ait admis dans ce cas différent sans juger utile d'en contrôler sérieusement l'exactitude; je vais indiquer sommairement quelques expériences qui établissent que les solutions de borax ne subissent pas les modifications dont il s'agit lorsqu'on les chauffe pendant un temps quelconque, et que les phénomènes auxquels elles donnent lieu ne présentent pas la complication qu'on leur avait attribuée.

Lorsqu'on dissout du borax dans une quantité d'eau chaude, telle que la solution refroidie contienne un peu plus de sel qu'il n'en faudrait employer pour l'amener à saturation, la solution reste sursaturée et se conserve indéfiniment liquide à la température ordinaire dans un ballon de verre dont le col maintenu incliné ne permet pas aux poussières cristallines disséminées par l'opérateur de rencontrer le liquide. Vient-on à la toucher avec une parcelle de borax prismatique, l'excès de sel dissous se dépose rapidement sous forme de cristaux prismatiques.

Si la solution est très-concentrée au contraire, si elle contient, par exemple à 12 degrés, de 1,5 de sel pour 2 d'eau distillée, si de plus elle est conservée à l'abri des poussières de borax, elle abandonne peu à peu spontanément des cristaux octaédriques qui restent transparents au milieu de la solution, laquelle est encore assez riche en sel pour être sursaturée, et l'on peut y faire naître des cristaux prismatiques par le contact d'une parcelle à 10 équivalents d'eau.

Ce dépôt de cristaux octaédriques, dont l'abondance dépend de la concentration du liquide, s'effectue à toutes les températures pendant le refroidissement, même à 8 degrés; le poids de ce dépôt est le même dans les solutions que l'on a soumises à une ébullition de plusieurs

heures (sans perte d'eau) et dans celles dont l'ébullition n'a duré qu'une minute.

De plus, la solution concentrée par évaporation dans le vide abandonne peu à peu, sous forme de cristaux octaédriques, tout le sel qu'elle contient.

Il en est de même lorsque la solution sursaturée a été obtenue à froid, ce qu'il est facile de réaliser en dissolvant le borax dans un grand excès d'eau, pour éviter qu'il reste des parcelles non dissoutes, puis en concentrant peu à peu la solution dans le vide sec à une température de 10 à 12 degrés; dans ce cas encore tout le sel se dépose sous forme d'octaèdres sans résidu (1).

Ainsi, que l'on dissolve du borax prismatique dans l'eau, et que l'on soumette la solution à une longue ébullition, puis, qu'on sème, pendant le refroidissement, des cristaux prismatiques, il ne se développe que des cristaux de même forme et de même composition, tant qu'il y a sursaturation, et le reste du sel dissous se dépose aussi sous forme prismatique si l'on évapore le liquide à une température inférieure à celle à laquelle le sel à 10 équivalents d'eau se déshydrate. D'un autre côté, vient-on à soumettre une solution identique à la précédente à l'évaporation, avec ou sans cristaux octaédriques, il ne se développe que des cristaux de cette forme. Du reste, on arrive aux mêmes résultats si l'on répète la même expérience avec des solutions de borax octaédrique. On peut donc transformer totalement à volonté le sel dissous en sel octaédrique ou prismatique suivant la nature du germe cristallin introduit : les deux hydrates se comportent en dissolution de la même manière.

En résumé, les formes octaédrique et prismatique que présente le borax peuvent s'obtenir toutes deux à basse température, la première spontanément par le refroidissement d'une solution chaude ou l'évaporation à froid d'une solution étendue; sa production est analogue à celle des cristaux $NaOSO^3 + 7HO$ dans les solutions concentrées de sulfate de

(1) Lorsqu'on réalise cette expérience avec une solution très-étendue, il convient de ne pas mettre trop rapidement la solution avec un grand récipient complétement vide d'air et contenant de l'acide sulfurique concentré pour absorber la vapeur d'eau ; car l'évaporation est tellement active, dans ce cas, qu'il en résulte un refroidissement capable de solidifier presque immédiatement la plus grande partie de l'eau qui tient le sel en dissolution.

soude; l'autre, la forme prismatique, ne se produit pas spontanément, même à la température ordinaire : elle ne prend naissance qu'au contact d'un cristal prismatique, comme les cristaux de $NaOSO^3 + 10HO$, qui ne se forment qu'au contact d'un cristal de cette substance ou d'un corps isomorphe. Ce n'est donc là qu'un cas particulier d'un phénomène dont j'ai fait ressortir la généralité, et il n'y a pas lieu d'attribuer à l'action prolongée de la chaleur sur la solution de borax un effet d'une nature particulière. On pourrait peut-être se rendre compte de ce résultat, annoncé par divers observateurs, en admettant que l'on ait par une longue ébullition concentré suffisamment la solution pour qu'elle abandonne une plus grande quantité de sel à 5HO.

Si l'on 'en rapporte aux résultats que j'ai signalés précédemment, l'explication des faits observés sur le borax est des plus simples. La température de 56 degrés, qu'on a indiquée comme limite inférieure à la production du borax octaédrique, n'est en réalité qu'une température voisine de la limite supérieure à laquelle on peut observer la production du borax prismatique, car le sel perd une partie de son eau à cette température; au-dessous de cette température, la solution de borax touchée par des cristaux prismatiques donne des cristaux de cette forme. C'est ce qu'on observe dans les fabriques de borax, où l'atmosphère contient toujours des parcelles de borax $NaO\,2BoO^3 + 10HO$ plus ou moins effleuri, lesquelles agissent de la même manière que le sel non effleuri.

Au contraire, le borax octaédrique $NaO\,2BoO^3 + 5HO$ se produit spontanément dans les solutions concentrées et à toute température; mais la solution au sein de laquelle il se dépose contient encore assez de sel pour être sursaturée par rapport au sel prismatique plus hydraté : il résulte de là que, si l'on opère sur une solution concentrée dans laquelle se sont déjà déposés des cristaux octaédriques, au contact des parcelles prismatiques la solution abandonne des cristaux de même forme, qui, après s'être développés librement dans le liquide, envahissent peu à peu l'eau mère interposée entre les assises cristallines des octaèdres qui sont ainsi traversés par des cristaux de forme et d'indice de réfraction différents, de sorte qu'ils deviennent graduellement d'un blanc opaque, à mesure que cette cristallisation fait des progrès dans leur intérieur.

Pour démontrer, du reste, que dans cette circonstance il n'y a pas, contrairement à une opinion reçue, transformation du borax octaédrique en prismatique par fixation pure et simple de 5 équivalents d'eau, j'ai produit par évaporation à froid dans le vide sec des cristaux octaédriques dans un ballon de verre jusqu'à ce qu'il ne restât plus de liquide. Après avoir laissé rentrer dans le ballon de l'air lavé soigneusement, je l'ai dressé de manière que son col tenu verticalement plongeât dans un vase rempli d'eau et j'ai fermé le ballon par un bouchon, en laissant une couche d'eau d'environ 2 centimètres sur le bouchon à l'intérieur du ballon. Les cristaux octaédriques fixés sur les parois de ce vase n'ont pas tardé à se trouver dans une atmosphère saturée d'humidité, et cependant ils n'ont perdu ni leur forme, ni leur transparence. Je conserve un ballon préparé de cette manière le 10 février 1874, et dans lequel on peut voir encore aujourd'hui des octaèdres de borax parfaitement limpides, bien qu'ils aient séjourné pendant 350 jours dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau.

Comment se fait-il cependant qu'au bout d'un certain temps les solutions contenant primitivement du borax octaédrique finissent par ne plus contenir que du borax prismatique? C'est un fait d'expérience qui s'explique facilement d'après les principes exposés précédemment, bien qu'il paraisse être en contradiction avec leurs conséquences.

Remarquons d'abord que, si l'on fait une solution, saturée de borax prismatique ou peu sursaturée, et qu'on amène au contact de la solution un cristal octaédrique, il se dissoudra si l'on opère à la température ordinaire.

Cela posé, considérons une solution sursaturée dans laquelle sont déposés des cristaux octaédriques, et touchons-la avec un cristal prismatique, la solution donnera des cristaux prismatiques qui croîtront même aux dépens de l'eau mère interposée dans les octaèdres. Alors, s'il y a assez d'eau pour que le reste de la solution soit seulement saturé par rapport aux cristaux prismatiques, une petite quantité du sel octaédrique pourra se dissoudre, et concentrera la solution, qui abandonnera de nouveau des cristaux prismatiques sur ceux qui se sont déjà produits, et le même phénomène continuera, de sorte que peu à peu, à mesure que les cristaux octaédriques se dissoudront, il se déposera des cristaux prismatiques qui finiront par rester seuls dans la solution.

C'est ainsi que des cristaux octaédriques laissés dans une atmosphère saturée d'humidité finissent par se transformer totalement en cristaux prismatiques lorsqu'on a mis un de leurs points en contact avec un cristal prismatique. On conçoit par ce qui précède que cette transformation est plus rapide lorsqu'on mouille les cristaux octaédriques.

28 janvier 1875.

# CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ
# DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES
## AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE,

ET RENFERMANT

## UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. J. COLLET.

Supposons que l'on propose de déterminer les solutions communes à un système de $m$ équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_m = 0,$$

dans lesquelles $f_1, f_2, \ldots, f_m$ désignent des fonctions quelconques de $n$ variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et des dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_n$, prises par rapport à ces variables, d'une fonction inconnue qui, d'ailleurs, n'entre pas dans ces diverses équations.

Pour que le problème soit possible, on sait que, si l'on pose, pour plus de simplicité, le symbole $(f_i, f_k)$, égal à l'expression suivante :

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{df_i}{dq_h} \frac{df_k}{dp_h} - \frac{df_i}{dp_h} \frac{df_k}{dq_h} \right),$$

il est nécessaire et suffisant que les fonctions qui forment les premiers membres des équations proposées satisfassent, prises deux à deux de toutes les manières possibles, à des conditions de la forme $(f_i, f_k) = 0$. Les conditions précédentes doivent être satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations proposées. Si cela n'a pas lieu, le problème est impossible à résoudre dans la généralité avec laquelle il est

posé; mais il peut néanmoins admettre des solutions plus particulières, en établissant de nouvelles relations entre les dérivées partielles de la fonction cherchée et les variables indépendantes, ce qui diminue la généralité du problème.

Voici comment on opère pour cela :

Si la fonction $(f_i, f_k)$ ne s'annule pas, on l'égale néanmoins à zéro, ce qui donne une nouvelle équation qui, jointe aux proposées, devra, comme elles, être satisfaite par toute solution commune. Le nombre des équations à intégrer simultanément augmente ainsi d'autant d'unités qu'il y a de conditions non satisfaites par les équations proposées.

On traitera le nouveau système comme l'ancien, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un système d'équations satisfaisant toutes aux conditions d'intégrabilité.

Si le nombre des équations de ce dernier système se trouve inférieur ou égal à $n$, le problème est possible; mais le contraire a lieu si ce nombre est supérieur à $n$.

On voit que l'on peut arrêter les calculs quand le nombre des équations distinctes est égal à $n$, et, si alors elles ne satisfont pas toutes aux conditions énoncées, le problème est impossible.

Mais, pour décider de la possibilité ou de l'impossibilité du problème, il ne faut conserver que les équations distinctes ; et, pour les distinguer de celles qui ne le sont pas, il faudrait connaître les relations qui peuvent exister *a priori* entre les fonctions que l'on obtient en faisant ainsi une application réitérée de l'opération désignée par le symbole $(f_i, f_k)$, soit aux fonctions proposées, soit à celles qui résultent déjà de cette opération; et, en suivant cette voie de recherches, on est conduit à se demander si le nombre des fonctions distinctes que l'on peut déduire d'une série donnée de fonctions, par l'opération répétée dont nous nous occupons, est limité ou illimité. Cette question a, d'ailleurs, son importance pratique; car, si elle se résolvait par l'affirmative, tous les systèmes seraient intégrables lorsque le nombre des variables dépasserait pour chacun d'eux une limite assignable.

La résolution de ces diverses questions fait l'objet de ce Mémoire, et, comme il ne sera fait aucune hypothèse particulière sur la forme des fonctions, les résultats auxquels on parviendra se présenteront avec toute la généralité désirable.

## § I. — *Définitions et notations.*

Si l'on considère deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ de $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$, qui se correspondent deux à deux, $p_k$ à $q_k$, nous désignerons sous le nom de *combinaison différentielle* de ces deux fonctions l'opération indiquée par la formule suivante :

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{d\varphi}{dq_h} \frac{d\psi}{dp_h} - \frac{d\varphi}{dp_h} \frac{d\psi}{dq_h} \right),$$

et nous représenterons par le symbole $(\varphi, \psi)$ le résultat de cette opération.

Si l'on donne une suite $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de fonctions analogues aux précédentes $\varphi$ et $\psi$, on pourra les combiner deux à deux; puis les résultats obtenus pourront être de nouveau combinés soit aux fonctions données, soit entre eux, et ainsi de suite. Les fonctions nouvelles ainsi obtenues seront désignées sous le nom de *fonctions complexes*, par opposition avec les proposées qui seront dites *simples*.

Quant au mode de notation à employer pour désigner ces fonctions complexes, nous représenterons par le symbole $(\varphi, \psi, \lambda, \ldots)$ la fonction obtenue en combinant $\varphi$ et $\psi$, puis le résultat de cette opération avec $\lambda$, et ainsi de suite.

Parmi les fonctions complexes que l'on peut déduire d'une série donnée de fonctions simples, nous distinguerons particulièrement celles qui ne sont formées que de fonctions simples, comme $(f_i, f_k, f_h, \ldots)$. La considération de ces fonctions est importante; car, dans la suite, nous prouverons que toutes les autres fonctions complexes sont des fonctions linéaires de fonctions de cette espèce particulière. Aussi, pour plus de simplicité, les désignerons-nous sous le nom de *fonctions canoniques*. Le nombre des fonctions simples entrant dans l'une de ces fonctions sera l'*ordre* de cette fonction. Enfin on pourra les représenter en remplaçant les fonctions simples par leurs indices respectifs dans le symbole adopté pour la représentation des fonctions complexes. Nous ajouterons à ces définitions quelques remarques évidentes.

D'après la définition même de l'opération qui nous occupe, il résulte que, dans une fonction complexe $(\varphi, \psi, \lambda, \ldots)$, on peut considérer comme effectuée la combinaison d'un nombre quelconque de fonctions successives en commençant par la gauche, et que, réciproquement, la première fonction à gauche, si elle est complexe, peut être remplacée par ses fonctions composantes; que l'on a identiquement

$$(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi),$$

ou, plus généralement, que l'on change le signe d'une fonction en changeant l'ordre de ses deux premières fonctions constituantes, c'est-à-dire que l'on a

$$(2) \qquad (\varphi, \psi, \lambda, \ldots) = -(\psi, \varphi, \lambda, \ldots);$$

et enfin que, si $\varphi$ est une somme de fonctions telle que $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$, on a identiquement

$$(3) \qquad (\varphi, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi) + \ldots$$

et aussi

$$(\psi, \varphi) = (\psi, \varphi_1) + (\psi, \varphi_2) + \ldots.$$

## § II. — *Développement des fonctions complexes quelconques en fonctions canoniques.*

Nous nous proposons d'établir la proposition générale suivante :

Théorème. — *Si $\varphi, \psi, \theta, \ldots, \mu$ sont des fonctions quelconques, simples ou complexes, la fonction $(\varphi, \psi, \theta, \ldots, \mu)$ s'exprime linéairement en fonctions canoniques.*

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant dû à Jacobi :

Lemme. — *Si $\varphi, \psi, \theta$ désignent trois fonctions quelconques de $q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n$, on a identiquement*

$$(4) \qquad (\varphi, \psi, \theta) + (\theta, \varphi, \psi) + (\psi, \theta, \varphi) = 0.$$

Si l'on pose

$$(\varphi, \psi) = \sum_h \left( \frac{d\varphi}{dq_h} \frac{d\psi}{dp_h} - \frac{d\varphi}{dp_h} \frac{d\psi}{dq_h} \right),$$

on aura

$$(\varphi, \psi, \theta) = \sum_k \left[ \frac{d(\varphi, \psi)}{dq_k} \frac{d\theta}{dp_k} - \frac{d(\varphi, \psi)}{dp_k} \frac{d\theta}{dq_k} \right]$$

$$= \sum_{k,h} \left[ \left( \frac{d\varphi}{dq_h} \frac{d^2\psi}{dp_h dq_k} - \frac{d\varphi}{dp_h} \frac{d^2\psi}{dq_h dq_k} \right) \frac{d\theta}{dp_k} - \left( \frac{d\varphi}{dq_h} \frac{d^2\psi}{dp_h dp_k} - \frac{d\varphi}{dp_h} \frac{d^2\psi}{dq_h dp_k} \right) \frac{d\theta}{dq_k} \right.$$

$$\left. - \left( \frac{d\psi}{dq_h} \frac{d^2\varphi}{dp_h dq_k} - \frac{d\psi}{dp_h} \frac{d^2\varphi}{dq_h dq_k} \right) \frac{d\varphi}{dp_k} + \left( \frac{d\psi}{dq_h} \frac{d^2\varphi}{dp_h dp_k} - \frac{d\psi}{dp_h} \frac{d^2\varphi}{dq_h dp_k} \right) \frac{d\theta}{dq_k} \right].$$

On obtiendra les développements de $(\theta, \varphi, \psi)$ et de $(\psi, \theta, \varphi)$ en remplaçant, dans la formule précédente, les lettres $\varphi$, $\psi$, $\theta$ successivement par les suivantes $\theta, \varphi, \psi$, puis par $\psi, \theta, \varphi$. On peut alors démontrer l'identité (4) en faisant voir que tous les termes qu'elle contient se détruisent deux à deux. Considérons, par exemple, les termes en $d^2\psi$. Pour prouver que ces termes s'entre-détruisent, il suffit de remarquer que les fonctions $(\varphi, \psi, \theta)$ et $(\psi, \theta, \varphi)$ renferment seules des termes de l'espèce considérée; que les termes en question entrant dans la première de ces deux expressions sont les mêmes en valeur absolue que ceux qui entrent dans la seconde, et enfin que les signes des termes semblables sont contraires dans les deux expressions. Cette dernière assertion résulte de cette remarque que, dans la valeur qui précède $(\varphi, \psi, \theta)$, un terme contenant une dérivée seconde de $\varphi$ est positif si les deux variables par rapport auxquelles on différentie sont de même espèce, négatif dans le cas contraire, et que l'inverse a lieu pour les termes en $d^2\psi$. Comme, dans l'expression $(\psi, \theta, \varphi)$, $\psi$ a précisément la place de $\varphi$ dans la première expression considérée, ce que nous avons avancé se trouve pleinement justifié.

Comme on raisonnerait de même pour les termes en $d^2\varphi$ et en $d^2\theta$, le lemme énoncé est donc complétement démontré.

Cela posé, revenons au théorème proposé.

Nous étudierons en premier lieu le cas d'*une fonction composée de deux fonctions canoniques, $\varphi$ et $\psi$.*

Pour trouver une loi, nous étudierons d'abord deux cas particuliers.

1° Supposons que la fonction $\psi$ soit du second ordre,

$$\psi = (f_i, f_h),$$

on aura

$$(\psi, \varphi) = (f_i, f_h, \varphi).$$

Mais, d'après le lemme qui précède, on a

$$(f_i, f_h, \varphi) + (\varphi, f_i, f_h) + (f_h, \varphi, f_i) = 0;$$

d'où l'on tire, en tenant compte de la formule (2),

$$(5) \qquad (f_i, f_h, \varphi) \text{ ou } (\psi, \varphi) = (\varphi, f_h, f_i) - (\varphi, f_i, f_h),$$

ce qui est conforme au théorème énoncé.

2° Supposons que $\psi$ soit du troisième ordre,

$$\psi = (f_i, f_h, f_k).$$

Posons

$$\psi = (\psi_1, f_k), \quad \psi_1 = (f_i, f_h),$$

on aura, d'après la formule (4),

$$(\psi_1, f_k, \varphi) + (\varphi, \psi_1, f_k) + (f_k, \varphi, \psi_1) = 0,$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad (\psi_1, f_k, \varphi) \text{ ou } (\psi, \varphi) = (\varphi, f_k, \psi_1) - (\varphi, \psi_1, f_k).$$

Mais

$$(\varphi_1, f_k, \psi_1) = -[\psi_1, (\varphi, f_k)] \quad \text{ou} \quad -[f_i, f_h, (\varphi, f_k)],$$

les fonctions composantes mises entre parenthèses devant être préalablement combinées. D'ailleurs, si dans la formule (5) on remplace $\varphi$ par $(\varphi, f_k)$, on obtiendra la valeur de $[f_i, f_h, (\varphi, f_k)]$, et par suite la suivante :

$$(7) \qquad (\varphi, f_k, \psi_1) = -(\varphi, f_k, f_h, f_i) + (\varphi, f_k, f_i, f_h).$$

D'autre part, par un calcul semblable, on trouve

$$(\varphi, \psi_1) = -(f_i, f_h, \varphi) = -(\varphi, f_h, f_i) + (\varphi, f_i, f_h);$$

d'où, d'après la formule (3),

$$(8) \qquad (\varphi, \psi_1, f_k) = -(\varphi, f_h, f_i, f_k) + (\varphi, f_i, f_h, f_k).$$

Portant maintenant les valeurs (7) et (8) dans l'égalité (6), on aura

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} (\psi, \varphi) \text{ ou } (f_i, f_h, f_k, \varphi) = {} & (\varphi, f_h, f_i, f_k) - (\varphi, f_k, f_h, f_i) \\ & - (\varphi, f_i, f_h, f_k) + (\varphi, f_k, f_i, f_h), \end{aligned} \right.$$

ce qui est encore conforme au théorème énoncé.

De la comparaison des formules (5) et (9) on peut déjà déduire une loi pour la formation des termes du développement de la fonction $(\psi, \varphi)$, dans le cas où $\psi$ et $\varphi$ sont canoniques, loi que l'on démontrera ensuite être applicable à tous les cas.

Un terme quelconque du développement est caractérisé par son signe et par l'ordre des indices des fonctions qui entraient dans la composition de $\psi$.

Si l'on compare, comme on l'a dit, les formules (5) et (9), on reconnaît tout de suite que *les permutations des indices qui répondent aux termes de la formule* (9) *peuvent se déduire de celles des termes de la formule* (5), *en les faisant successivement suivre ou précéder de l'indice k qui n'y entre pas, le signe de chaque terme étant conservé dans le premier cas et changé dans le second.*

La formule (5) pourrait elle-même se déduire, en suivant la même loi, de l'identité $(f_i, \varphi) = -(\varphi, f_i)$.

Nous allons démontrer que *cette loi est générale.* Pour cela, nous prouverons que, si elle a lieu quand la fonction $\psi$ est du $n^{ième}$ ordre, elle a encore lieu quand cette fonction est d'ordre $n+1$.

Soit $\psi$ une fonction canonique d'ordre $n+1$; si $f_\alpha$ est la dernière fonction entrant dans sa composition, on pourra poser $\psi = (\psi_1, f_\alpha)$, $\psi_1$ étant une fonction du $n^{ième}$ ordre. On aura, d'après les formules (5) et (2),

$$(\psi, \varphi) = (\psi_1, f_\alpha, \varphi) = (\psi_1, \varphi, f_\alpha) - [\psi_1, (\varphi, f_\alpha)], \tag{10}$$

attendu que l'on devrait avoir

$$(\psi_1, f_\alpha, \varphi) = (\varphi, f_\alpha, \psi_1) - (\varphi, \psi_1, f_\alpha),$$

et que

$$(\varphi, f_\alpha, \psi_1) = -[\psi_1, (\varphi, f_\alpha)] \quad \text{et} \quad (\varphi, \psi_1, f_\alpha) = -(\psi_1, \varphi, f_\alpha).$$

Or les termes du développement de $(\psi_1, \varphi, f_\alpha)$ sont ceux de $(\psi_1, \varphi)$, que l'on doit successivement combiner à $f_\alpha$ en conservant les signes; en d'autres termes, les permutations des indices dans les différents termes de $(\psi_1, \varphi, f_\alpha)$ se déduisent de celles de $(\psi_1, \varphi)$ en les faisant simplement suivre de $\alpha$, sans changer les signes correspondants.

D'un autre côté, les termes du développement de $-[\psi_1, (\varphi, f_\alpha)]$ sont obtenus en développant $-(\psi_1, \varphi_1)$ et remplaçant ensuite $\varphi_1$ par $(\varphi, f_\alpha)$.

Or les permutations des indices du terme de $(\psi_1, \varphi_1)$ sont les mêmes que celles des termes de $(\psi_1, \varphi)$. En rétablissant $(\varphi, f_\alpha)$ à la place de $\varphi_1$, on fera précéder chacune des permutations précédentes de l'indice $\alpha$. D'ailleurs, les termes de $-[\psi_1, (\varphi, f_\alpha)]$ seront de signe contraire avec ceux du développement de $(\psi_1, \varphi)$.

Nous pourrons donc conclure, en rapprochant les résultats relatifs aux deux groupes de termes qui précèdent, que *la loi énoncée a lieu quand $\psi$ est d'ordre quelconque.*

D'après cela, le développement de la fonction composée $(\psi, \varphi)$ peut facilement être obtenu, $\varphi$ et $\psi$ étant des fonctions canoniques. Ce développement se compose d'une suite de termes formés des fonctions qui composent $\varphi$, suivies des fonctions qui composent $\psi$, ces dernières étant permutées d'une façon convenable. Pour effectuer le développement, il suffit donc de connaître la permutation des indices des fonctions de $\psi$, et les signes répondent aux diverses permutations. Ces permutations, avec leurs signes respectifs, seront, pour simplifier le langage, désignées sous le nom de *permutations canoniques* des indices de la fonction $\psi$, et nous conviendrons de donner à chaque permutation un signe contraire de celui du terme correspondant dans le développement.

Soit, par exemple,

$$\psi = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5).$$

On formera successivement les permutations de 2, 3,... indices à partir du premier à gauche, chacun des groupes de permutations se déduisant du précédent en suivant la loi de développement qui vient d'être établie.

On aura ainsi, pour les permutations des deux premiers indices,

$$+(1, 2), \quad -(2, 1);$$

puis, pour les trois premiers,

$$+(1, 2, 3), \quad -(2, 1, 3), \quad -(3, 1, 2), \quad +(3, 2, 1),$$

et ainsi de suite. Donc enfin les permutations canoniques des indices de $\psi$ seront les suivantes :

$$\begin{array}{llll}
+(1,2,3,4,5), & -(2,1,3,4,5), & -(3,1,2,4,5), & +(3,2,1,4,5), \\
-(5,1,2,3,4), & +(5,2,1,3,4), & +(5,3,1,2,4), & -(5,3,2,1,4), \\
-(4,1,2,3,5), & +(4,2,1,3,5), & +(4,3,1,2,5), & -(4,3,2,1,5), \\
+(5,4,1,2,3), & -(5,4,2,1,3), & -(5,4,3,1,2), & +(5,4,3,2,1).
\end{array}$$

Le développement de la fonction $(\psi, \varphi)$ sera alors le suivant :

$$\begin{aligned}(\psi, \varphi) = &-(\varphi f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) + (\varphi f_2 f_1 f_3 f_4 f_5) + (\varphi f_3 f_1 f_2 f_4 f_5) - (\varphi f_3 f_2 f_1 f_4 f_5)\\ &+ (\varphi f_5 f_1 f_2 f_3 f_4) - (\varphi f_5 f_2 f_1 f_3 f_4) - (\varphi f_5 f_3 f_2 f_1 f_4) + (\varphi f_5 f_3 f_2 f_1 f_4)\\ &+ (\varphi f_4 f_1 f_2 f_3 f_5) - (\varphi f_4 f_2 f_1 f_3 f_5) - (\varphi f_4 f_3 f_1 f_2 f_5) + (\varphi f_4 f_3 f_2 f_1 f_5)\\ &- (\varphi f_5 f_4 f_1 f_2 f_3) + (\varphi f_5 f_4 f_2 f_1 f_3) + (\varphi f_5 f_4 f_3 f_1 f_2) - (\varphi f_5 f_4 f_3 f_2 f_1)\end{aligned}$$

Le *nombre des termes* du développement de la fonction $(\psi, \varphi)$, où $\psi$ et $\varphi$ sont des fonctions canoniques quelconques, s'obtient immédiatement en remarquant qu'il ne dépend que de l'ordre de la fonction $\psi$, et qu'il double lorsque cet ordre augmente d'une unité. Ce nombre étant 2 quand $\psi$ est du second ordre, *le nombre des termes sera* $2^{n-1}$ *si* $n$ *est l'ordre de la fonction* $\psi$.

Tout ce qui précède subsiste, quel que soit l'ordre de la fonction $\psi$. Si nous supposons que cet ordre soit égal à l'unité, c'est-à-dire que $\varphi$ soit une fonction simple, le premier membre du développement sera une fonction canonique qui sera alors développée en fonctions de la même espèce. Ces développements constituent alors des relations entre des fonctions canoniques de même ordre.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

*Toute fonction canonique peut s'exprimer linéairement en fonctions canoniques du même ordre.*

On verra plus loin quelle est l'importance de ces développements.

Pour ce qui concerne les permutations canoniques, comme elles jouent un rôle très-important dans la suite de ce travail, nous étudierons leurs principales propriétés dans le paragraphe suivant. Quant à présent, pour compléter la démonstration du théorème concernant le développement des fonctions complexes, il reste à prouver qu'il s'étend à des *fonctions quelconques, en nombre quelconque.*

Cela est d'abord évident pour une fonction composée seulement de fonctions canoniques; car, si $(\psi, \varphi, \theta, \ldots)$ est une telle fonction, on développera d'abord la fonction $(\psi, \varphi)$, puis on combinera chacun des termes obtenus avec la fonction $\theta$, et l'on développera de nouveau, et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les fonctions canoniques qui entrent dans la composition de la fonction proposée.

Pour passer de là aux fonctions complexes quelconques, il suffit de

remarquer que les fonctions composantes de ces dernières, si elles ne sont canoniques, résulteront de la combinaison d'autres fonctions qui, à leur tour, si elles ne sont pas canoniques, proviendront de la combinaison de fonctions plus simples. En continuant ainsi, on finira par trouver des fonctions canoniques qui, combinées entre elles, puis avec d'autres successivement, reproduiront la fonction considérée.

On pourra donc enfin conclure que *toutes les fonctions complexes sont des fonctions linéaires de celles que nous avons appelées* canoniques. Mais ces dernières ne sont pas elles-mêmes toutes distinctes, et nous aurons à étudier dans la suite les relations qu'elles présentent entre elles.

## § III. — *Propriétés des permutations canoniques.*

Si, en suivant la règle donnée à cet effet, on forme les permutations canoniques d'un arrangement quelconque d'indices, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda)$, par exemple, on remarque que, *dans chacune d'elles, à partir de $\alpha$ et en allant à droite ou à gauche, les indices se succèdent toujours dans l'ordre où ils se trouvent dans l'arrangement primitif*, et il est évident qu'on a toutes les permutations satisfaisant à cette condition. D'ailleurs, d'après la règle donnée, le signe change autant de fois qu'un nouvel indice est placé à gauche de $\alpha$; et, la permutation qui commence par $\alpha$ étant positive, *une permutation quelconque sera positive ou négative, suivant que le nombre des indices placés à gauche de $\alpha$ sera pair ou impair.*

Si, pour plus de généralité, on suppose que l'arrangement primitif donné soit précédé du signe $+$ ou du signe $-$, on dira qu'*une permutation quelconque est de même signe ou de signe contraire, suivant que le nombre des indices placés à gauche de $\alpha$ est pair ou impair.*

Cette remarque peut servir de définition aux permutations canoniques d'un arrangement primitif donné et fournir une nouvelle loi pour leur composition.

Si l'arrangement primitif, supposé positif, est, par exemple, le suivant : $+(\alpha, 1, 2, 3, 4, 5)$, la première permutation sera $+(\alpha, 1, 2, 3, 4, 5)$. Formons maintenant toutes les permutations qui n'ont qu'un indice à gauche de $\alpha$ : elles seront toutes négatives, et il suffira pour les obtenir de faire passer à gauche de $\alpha$ successivement et isolément cha-

cun des indices qui le suivent. On aura ainsi la suite

$$-(1,\alpha,2,3,4,5),\ -(2,\alpha,1,3,4,5),\ -(3,\alpha,1,2,4,5),$$
$$-(4,\alpha,1,2,3,5),\ -(5,\alpha,1,2,3,4).$$

Pour composer les permutations qui contiennent deux indices à gauche de $\alpha$, lesquelles seront toutes positives, on transportera isolément à gauche de chacune des permutations qu'on vient d'obtenir ceux des indices qui suivent $\alpha$, et qui, dans l'arrangement primitif, sont à droite de celui qui est à gauche de $\alpha$ dans la permutation considérée.

On aura ainsi les groupes suivants, au nombre de quatre seulement, la dernière permutation déjà obtenue n'en donnant pas de nouvelles :

$$+(2,1,\alpha,3,4,5),\ +(3,2,\alpha,1,4,5),\ +(4,3,\alpha,1,2,5),\ +(5,4,\alpha,1,2,3),$$
$$+(3,1,\alpha,2,4,5),\ +(4,2,\alpha,1,3,5),\ +(5,3,\alpha,1,2,4),$$
$$+(4,1,\alpha,2,3,5),\ +(5,2,\alpha,1,3,4),$$
$$+(5,1,\alpha,2,3,4).$$

On continue ainsi successivement. Chaque permutation obtenue en donne un groupe de nouvelles, en portant à sa gauche successivement ceux des indices qui sont à droite de $\alpha$ et qui, dans l'arrangement primitif, suivent aussi l'indice qui commence la permutation considérée, les nouvelles permutations étant d'un signe opposé à celui de la permutation dont on les déduit.

On voit facilement que cette loi de formation donne bien toutes les permutations possibles satisfaisant aux conditions énoncées plus haut; qu'elles sont toutes distinctes, et que, par suite, cette nouvelle loi pour la formation des permutations canoniques d'un arrangement primitif proposé peut être considérée comme définissant ces permutations.

Comme vérification nous formerons, en suivant l'une et l'autre loi, le tableau complet des permutations canoniques de l'arrangement $+(\alpha, 1, 2, 3, 4, 5)$.

La première loi de formation donne

$$+(\alpha,1,2,3,4,5)\ -(1,\alpha,2,3,4,5),\ -(2,\alpha,1,3,4,5)\ +(2,1,\alpha,3,4,5),$$
$$-(3,\alpha,1,2,4,5)\ +(3,1,\alpha,2,4,5),\ +(3,2,\alpha,1,4,5)\ -(3,2,1,\alpha,4,5),$$
$$-(4,\alpha,1,2,3,5)\ +(4,1,\alpha,2,3,5),\ +(4,2,\alpha,1,3,5)\ -(4,2,1,\alpha,3,5),$$
$$+(4,3,\alpha,1,2,5)\ -(4,3,1,\alpha,2,5),\ -(4,3,2,\alpha,1,5)\ +(4,3,2,1,\alpha,5),$$

$$-(5,\alpha,1,2,3,4)\ +(5,1,\alpha,2,3,4),\ +(5,2,\alpha,1,3,4)\ -(5,2,1,\alpha,3,4),$$
$$+(5,3,\alpha,1,2,4)\ -(5,3,1,\alpha,2,4),\ -(5,3,2,\alpha,1,4)\ +(5,3,2,1,\alpha,4),$$
$$+(5,4,\alpha,1,2,3)\ -(5,4,1,\alpha,2,3),\ -(5,4,2,\alpha,1,3)\ +(5,4,2,1,\alpha,3),$$
$$-(5,4,3,\alpha,1,2)\ +(5,4,3,1,\alpha,2),\ +(5,4,3,2,\alpha,1)\ -(5,4,3,2,1,\alpha);$$

la nouvelle donne à son tour :

$$+(\alpha,1,2,3,4,5),$$
$$-(1,\alpha,2,3,4,5),\ -(2,\alpha,1,3,4,5),\ -(3,\alpha,1,2,4,5),\ -(4,\alpha,1,2,3,5),$$
$$-(5,\alpha,1,2,3,4),$$
$$+(2,1,\alpha,3,4,5),\ +(3,2,\alpha,1,4,5),\ +(4,3,\alpha,1,2,5),\ +(5,4,\alpha,1,2,3),$$
$$+(3,1,\alpha,2,4,5),\ +(4,2,\alpha,1,3,5),\ +(5,3,\alpha,1,2,4),$$
$$+(4,1,\alpha,2,3,5),\ +(5,2,\alpha,1,3,4),$$
$$+(5,1,\alpha,2,3,4),$$
$$-(3,2,1,\alpha,4,5),\ -(4,3,2,\alpha,1,5),\ -(5,4,3,\alpha,1,2),$$
$$-(4,2,1,\alpha,3,5),\ -(5,3,2,\alpha,1,4),$$
$$-(5,2,1,\alpha,3,4),$$
$$-(4,3,1,\alpha,2,5),\ -(5,4,2,\alpha,1,3),$$
$$-(5,3,1,\alpha,2,4),$$
$$-(5,4,1,\alpha,2,3),$$
$$+(4,3,2,1,\alpha,5),\ +(5,4,3,2,\alpha,1),$$
$$+(5,3,2,1,\alpha,4),$$
$$+(5,4,2,1,\alpha,3),$$
$$+(5,4,3,1,\alpha,2),$$
$$-(5,4,3,2,1,\alpha);$$

et il est facile de constater que les deux tableaux qui précèdent renferment les mêmes termes.

Des règles données pour la formation des permutations canoniques on déduit immédiatement les deux théorèmes qui suivent.

Théorème I. — *A une permutation quelconque il en répond une seconde, dans laquelle les indices sont en sens inverse, dans le même ordre que pour la première, les signes de ces deux permutations étant différents ou identiques, suivant que le nombre des indices est pair ou impair.*

Ce théorème, dont la démonstration pourrait facilement se déduire de la première loi de développement, résulte plus simplement encore de la seconde.

Il est évident, en effet, que les termes dont les indices sont, en sens inverse, dans le même ordre dans l'un et dans l'autre, seront obtenus en permutant un même arrangement primitif. Il reste à déterminer quels seront leurs signes.

Soit $\alpha$ le premier indice de l'arrangement primitif. Si le nombre des indices est impair, les nombres qui expriment combien il y en a avant et après $\alpha$, dans une permutation quelconque, seront en même temps pairs ou impairs; donc, dans la permutation d'ordre inverse par rapport à celle que l'on considère, le nombre des indices qui précèdent $\alpha$ est aussi pair ou impair en même temps que dans la première. Donc, dans le cas où le nombre des indices est impair, les signes des deux permutations d'ordre inverse seront les mêmes.

Le contraire aura lieu si le nombre des indices est pair; car, si dans une permutation le nombre de ceux qui précèdent $\alpha$ est impair, le nombre de ceux qui le suivent, c'est-à-dire le nombre de ceux qui précèdent $\alpha$ dans la permutation inverse est pair, et, par suite, les deux permutations correspondantes seront alors de signes contraires.

THÉORÈME II. — *Si les indices qui composent l'arrangement primitif sont respectivement $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,..., $\mu$, $\nu$, dont le nombre est $n$, les nombres de permutations qui commencent par ces différents indices sont respectivement égaux aux suivants :*

$$1,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots,\ 2^{n-2}.$$

Il est d'abord évident qu'il y a des permutations commençant par chacun des indices $\alpha$, $\beta$,..., $\nu$.

D'ailleurs, d'après la loi de formation, chaque nouvel indice pouvant être placé devant toutes les permutations qui commencent par les indices qui le précèdent dans l'arrangement primitif, aussi bien qu'à la suite de ces permutations, il en résulte que le nombre des permutations commençant par un indice quelconque sera égal au nombre de celles qui commencent par les indices qui le précèdent. Comme une seule permutation commence par le premier indice, et que, d'ailleurs, chacun des nombres de la suite $1, 1, 2, 2^2,\ldots, 2^{n-2}$ se trouve égal à la somme de ceux qui le précèdent, le théorème énoncé se trouve démontré.

*Remarque.* — On peut déduire de là le *nombre des permutations ca-*

*noniques d'un arrangement de n indices.* Ce nombre est égal à

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1},$$

résultat déjà obtenu.

Dans tout ce qui précède nous nous sommes occupé de la composition des permutations canoniques d'un arrangement primitif donné; mais le problème inverse peut être considéré, et nous nous proposons de le résoudre, parce que sa solution est nécessaire pour la suite de ce travail.

Ce problème peut s'énoncer ainsi :

Problème. — *Étant donné un arrangement d'indices quelconques, déterminer le nombre et la forme des arrangements primitifs dont il pourrait être déduit par des permutations canoniques.*

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta, \varkappa, \iota, \ldots, \lambda)$ un arrangement de $(m+1)$ indices, et considérons ceux des arrangements primitifs cherchés qui commencent par l'indice $\varkappa$, qui occupe le $n+1^{\text{ième}}$ rang dans l'arrangement proposé.

Un arrangement quelconque de ce groupe se compose de l'indice $\varkappa$ suivi des $m-n$ indices $\iota, \ldots, \lambda$, dont l'ordre relatif est conservé, et entre lesquels les $n$ indices $\delta, \ldots, \gamma, \beta, \alpha$ sont intercalés de telle façon qu'ils conservent aussi leur ordre relatif à partir de $\varkappa$. Si l'on choisit, d'une manière quelconque, les $n$ positions parmi les $m$ places qui doivent être occupées par les indices qui seront placés à la suite de $\varkappa$, on ne pourra disposer que d'une seule façon, dans ces $n$ positions, les $n$ indices $\delta, \ldots, \gamma, \beta, \alpha$, et les autres indices occuperont ensuite successivement, en suivant leur ordre, les places restées libres. On n'aura donc qu'une permutation primitive répondant au choix de $n$ positions à la suite de $\varkappa$.

Si l'on désigne par $C_m^n$ le nombre des combinaisons de $m$ objets pris $n$ à $n$, on peut faire de $C_m^n$ façons différentes le choix de ces $n$ positions; donc le nombre des arrangements primitifs commençant par l'indice $\varkappa$ est égal à $C_m^n$, et ce qui précède indique comment on les composerait. Tous ces arrangements donnant le proposé par les mêmes transpositions d'indices à gauche de $\alpha$ seront de même signe, positifs

si $n$ est pair, négatifs si $n$ est impair, l'arrangement proposé étant supposé positif.

Si l'on donne maintenant à $n$ successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$, et que l'on ajoute les résultats obtenus en convenant que $C_m^0 = 1$, on aura le nombre total des arrangements dont le proposé peut être déduit, les signes de ces arrangements étant convenablement choisis. Ce nombre sera

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m.$$

Le problème proposé étant ainsi résolu pour le cas simple où les indices ne sont astreints à satisfaire à aucune condition, nous considérerons actuellement un cas plus complexe, mais très-important : c'est celui dans lequel *l'arrangement cherché est astreint à la condition de pouvoir être déduit canoniquement d'un autre arrangement primitif donné des mêmes indices.*

Cherchons d'abord quelles sont les conditions de possibilité d'un pareil problème. Pour cela nous étudierons d'abord les relations qui doivent exister entre un arrangement primitif donné et les permutations déduites de ses propres permutations.

Soient, pour fixer les idées,

$(\alpha, a, b, c, d, f, g, h, l)$ l'arrangement primitif donné,
$(g, d, a, \alpha, b, c, f, h, l)$ une de ses permutations commençant par l'un quelconque de ses indices,
$(l, h, b, f, g, d, a, \alpha, c)$ une permutation quelconque de la précédente.

Dans la permutation intermédiaire les indices sont, par rapport à $\alpha$, dans le même ordre que dans la première; dans la dernière ils sont, par rapport à $g$, dans le même ordre que dans la seconde d'où elle est déduite; donc, dans la dernière, d'où l'on devrait partir pour trouver la seconde, pour chacun des groupes séparés par $g$, les indices sont, par rapport à $\alpha$ ou par rapport à celui des indices du groupe qui, dans l'arrangement primitif, est le plus voisin de $\alpha$, dans le même ordre relatif que dans cet arrangement. D'ailleurs $g$ est un terme commun à chacun de ces deux groupes; il doit donc, dans l'arrangement primitif proposé, occuper un rang plus éloigné de $\alpha$ que chacun des indices qui sont immédiatement à côté de lui, à moins qu'il ne soit lui-même,

dans l'un des groupes, le terme le moins éloigné de $\alpha$, auquel cas la permutation proposée a tous ses indices, par rapport à $\alpha$, dans l'ordre de l'arrangement primitif donné.

Les conditions qui précèdent sont nécessaires pour que, la première et la troisième permutation étant données, on puisse en trouver une, telle que la seconde, qui puisse être déduite de la première, et soit susceptible de donner la troisième par des permutations canoniques.

Ces conditions sont suffisantes.

En effet, si elles sont remplies par la permutation proposée ($l$, $h$, $b$, $f$, $g$, $d$, $a$, $\alpha$, $c$) relativement à l'un des indices $g$, on pourra toujours, sans changer l'ordre des indices par rapport à $g$, intercaler les indices qui précèdent cette lettre entre ceux qui la suivent, de façon qu'ils soient aussi, par rapport à $\alpha$, dans l'ordre où ils se trouvent dans l'arrangement primitif donné.

Cette intercalation pourra se faire *de deux façons différentes, si les indices ne sont pas dans l'ordre de l'arrangement primitif, et d'une seule dans le cas contraire.*

Considérons d'abord *le premier cas.*

*Si $\alpha$ est à la droite de $g$*, on commencera par l'indice de gauche qui est le plus voisin de $\alpha$ dans l'arrangement primitif. Cet indice pourra toujours se placer soit à droite, soit à gauche de $\alpha$, après les indices qui le précèdent dans l'ordre relatif à $\alpha$; après quoi les positions des autres indices seront déterminées, puisqu'ils doivent conserver l'ordre dans lequel ils se trouvent par rapport à $g$ dans la permutation proposée. On trouvera ainsi, pour l'exemple considéré, les deux permutations ($g$, $f$, $d$, $a$, $\alpha$, $b$, $c$, $h$, $l$) et ($g$, $f$, $d$, $b$, $a$, $\alpha$, $c$, $h$, $l$), qui, abstraction faite du signe, satisfont aux conditions du problème.

*Si $\alpha$ est à gauche,* on le placera soit à droite, soit à gauche de l'indice de droite, qui, dans l'arrangement primitif, est le plus voisin de lui, et, les autres indices se plaçant ensuite en suivant leur rang, on trouvera encore deux permutations.

Quant aux signes, il est évident que les deux permutations obtenues dans l'un ou l'autre cas sont de signes contraires. La permutation proposée devant se déduire de l'une ou de l'autre par le même nombre de transpositions d'indices, les résultats obtenus seront identiques, mais de signes contraires. Par suite, *une seule des deux per-*

*mutations obtenues répond au problème posé; l'autre conduit à une permutation qui est de signe contraire de la proposée.*

Nous remarquerons enfin que, dans le cas que nous venons d'étudier, où les indices ne sont pas, par rapport à $\alpha$, dans le même ordre que dans l'arrangement primitif donné, il ne peut exister qu'un seul indice, tel que $g$, satisfaisant aux conditions énoncées. Donc, dans ce cas, *si le problème est possible, il n'est susceptible que d'une solution.*

Dans le *second cas*, qui est celui *où les indices sont, par rapport à $\alpha$, dans le même ordre que dans l'arrangement primitif donné*, les conditions sont évidemment satisfaites par rapport à chacun des indices de la permutation; mais l'intercalation ne peut plus se faire que d'une seule façon. Le problème admet donc, dans ce cas, autant de solutions qu'il y a d'indices, si, toutefois, on fait abstraction des signes. Quant à ces derniers, si l'on remarque que la permutation proposée, à ne considérer que ses indices, pourrait se déduire de l'arrangement primitif, et qu'en la permutant elle donne une permutation identique à elle-même, on conclura que *le problème n'est possible qu'autant que la permutation proposée a le même signe que celui qu'elle aurait si elle était déduite directement de l'arrangement primitif donné, et, dans ce cas, le problème admet autant de solutions qu'il y a d'indices dans la permutation.*

Nous appliquerons ce qui précède au théorème qui suit.

On sait que *les permutations canoniques d'un arrangement donné* $(\alpha, a, b, c, d, f, g, h, l)$ *forment deux catégories, suivant qu'elles commencent ou finissent par l'indice $l$.* On sait, en outre, qu'à une permutation quelconque du premier groupe en correspond une du second, qui est formée des mêmes indices se succédant en ordre inverse, les signes de ces deux permutations étant différents ou identiques, suivant que le nombre des indices est pair ou impair. Cela posé, nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si l'on permute canoniquement les termes de l'un ou de l'autre des deux groupes suivant lesquels on peut classer les permutations d'un arrangement donné, on obtient pour résultat toutes les permutations canoniques de cet arrangement.*

Considérons d'abord un terme $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$ du premier

groupe. En le permutant canoniquement, on aura d'abord les deux suivants : $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$ et $+(h, f, d, a, \alpha, b, c, g, l)$, de même signe, parce que le nombre des indices est impair, qui, avec leurs analogues déduits des autres termes du premier groupe, formeront le tableau complet des permutations de l'arrangement primitif $(\alpha, a, b, c, d, f, g, h, l)$. Il reste à démontrer que toutes les autres permutations, déduites des termes du premier groupe, seront deux à deux identiques et de signes contraires.

Dans toutes ces permutations, l'indice $l$ occupant une position intermédiaire aux deux extrêmes, l'ordre des indices ne peut être, par rapport à $\alpha$, le même que dans l'arrangement primitif donné. Soit $+(h, a, \alpha, c, l, g, b, d, f)$ une permutation du terme considéré $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$ ; si l'on cherche les termes du premier groupe capables de la fournir, abstraction faite du signe, les conditions de possibilité de ce problème étant évidemment satisfaites par rapport à $l$, on trouve le terme considéré $+(l, g, c, b, \alpha, a, d, f, h)$ et le suivant $-(l, g, c, \alpha, a, b, d, f, h)$, qui, par les mêmes transpositions d'indices que le premier, conduirait à une permutation identique, mais de signe contraire, avec celle que l'on a déduite du premier terme. D'ailleurs, ce second terme $-(l, g, c, \alpha, a, b, d, f, h)$ existe réellement dans le groupe des permutations commençant par $l$; par conséquent, la permutation $+(h, a, \alpha, c, l, g, b, d, f)$ disparaîtra du résultat, et, comme il en serait de même pour toutes celles qui ne commencent ni ne finissent par $l$, le théorème énoncé est démontré pour le premier groupe.

Une démonstration semblable peut se faire pour les termes du second groupe, en remarquant que, dans l'une quelconque des permutations qui doivent disparaître, les conditions de possibilité du problème, qui consiste à chercher quels sont les termes du second groupe qui auraient pu donner cette permutation, sont satisfaites par rapport à un seul indice qui n'est plus $l$, mais celui qui doit commencer le terme cherché.

Le théorème énoncé est donc complétement démontré.

*Corollaire.* — Si l'on permute canoniquement toutes les permutations d'un arrangement donné, on retrouve deux fois ces mêmes permutations.

*Remarque.* — Toutes les propriétés qu'on vient d'établir concernant

les permutations canoniques ne cessent pas d'avoir lieu lorsqu'on suppose que les indices d'une même permutation ne soient pas tous distincts.

Pour terminer cette étude, nous vérifierons le théorème qu'on a démontré ci-dessus, en prenant un exemple quelconque.

Soit l'arrangement (1, 2, 3, 4, 5). En le permutant canoniquement, on obtient les termes suivants :

$$
\begin{aligned}
&+(1,2,3,4,5)-(2,1,3,4,5)-(3,1,2,4,5)+(3,2,1,4,5)\\
&-(4,1,2,3,5)+(4,2,1,3,5)+(4,3,1,2,5)-(4,3,2,1,5)\\
&-(5,1,2,3,4)+(5,2,1,3,4)+(5,3,1,2,4)-(5,3,2,1,4)\\
&+(5,4,1,2,3)-(5,4,2,1,3)-(5,4,3,1,2)+(5,4,3,2,1)
\end{aligned}
$$

Considérons les termes des deux dernières lignes, par exemple, et permutons-les canoniquement. On obtiendra ainsi le tableau suivant :

$$
\begin{aligned}
&+(5,1,2,3,4)-(1,5,2,3,4)-(2,5,1,3,4)+(2,1,5,3,4)\\
&-(3,5,1,2,4)+(3,1,5,2,4)+(3,2,5,1,4)-(3,2,1,5,4)\\
&-(4,5,1,2,3)+(4,1,5,2,3)+(4,2,5,1,3)-(4,2,1,5,3)\\
&+(4,3,5,1,2)-(4,3,1,5,2)-(4,3,2,5,1)+(4,3,2,1,5)\\
&-(5,2,1,3,4)+(2,5,1,3,4)+(1,5,2,3,4)-(1,2,5,3,4)\\
&+(3,5,2,1,4)-(3,2,5,1,4)-(3,1,5,2,4)+(3,1,2,5,4)\\
&+(4,5,2,1,3)-(4,2,5,1,3)-(4,1,5,2,3)+(4,1,2,5,3)\\
&-(4,3,5,2,1)+(4,3,2,5,1)+(4,3,1,5,2)-(4,3,1,2,5)\\
&-(5,3,1,2,4)+(3,5,1,2,4)+(1,5,3,2,4)-(1,3,5,2,4)\\
&+(2,5,3,1,4)-(2,3,5,1,4)-(2,1,5,3,4)+(2,1,3,5,4)\\
&+(4,5,3,1,2)-(4,3,5,1,2)-(4,1,5,3,2)+(4,1,3,5,2)\\
&-(4,2,5,3,1)+(4,2,3,5,1)+(4,2,1,5,3)-(4,2,1,3,5)\\
&+(5,3,2,1,4)-(3,5,2,1,4)-(2,5,3,1,4)+(2,3,5,1,4)\\
&-(1,5,3,2,4)+(1,3,5,2,4)+(1,2,5,3,4)-(1,2,3,5,4)\\
&-(4,5,3,2,1)+(4,3,5,2,1)+(4,2,5,3,1)-(4,2,3,5,1)\\
&+(4,1,5,3,2)-(4,1,3,5,2)-(4,1,2,5,3)+(4,1,2,3,5)\\
&-(5,4,1,2,3)+(4,5,1,2,3)+(1,5,4,2,3)-(1,4,5,2,3)\\
&+(2,5,4,1,3)-(2,4,5,1,3)-(2,1,5,4,3)+(2,1,4,5,3)\\
&+(3,5,4,1,2)-(3,4,5,1,2)-(3,1,5,4,2)+(3,1,4,5,2)\\
&-(3,2,5,4,1)+(3,2,4,5,1)+(3,2,1,5,4)-(3,2,1,4,5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
+(5,4,2,1,3)-(4,5,2,1,3)-(2,5,4,1,3)+(2,4,5,1,3)\\
-(1,5,4,2,3)+(1,4,5,2,3)+(1,2,5,4,3)-(1,2,4,5,3)\\
-(3,5,4,2,1)+(3,4,5,2,1)+(3,2,5,4,1)-(3,2,4,5,1)\\
+(3,1,5,4,2)-(3,1,4,5,2)-(3,1,2,5,4)+(3,1,2,4,5)\\
+(5,4,3,1,2)-(4,5,3,1,2)-(3,5,4,1,2)+(3,4,5,1,2)\\
-(1,5,4,3,2)+(1,4,5,3,2)+(1,3,5,4,2)-(1,3,4,5,2)\\
-(2,5,4,3,1)+(2,4,5,3,1)+(2,3,5,4,1)-(2,3,4,5,1)\\
+(2,1,5,4,3)-(2,1,4,5,2)-(2,1,3,5,4)+(2,1,3,4,5)\\
-(5,4,3,2,1)+(4,5,3,2,1)+(3,5,4,2,1)-(3,4,5,2,1)\\
+(2,5,4,3,1)-(2,4,5,3,1)-(2,3,5,4,1)+(2,3,4,5,1)\\
+(1,5,4,3,2)-(1,4,5,3,2)-(1,3,5,4,2)+(1,3,4,5,2)\\
-(1,2,5,4,3)+(1,2,4,5,3)+(1,2,3,5,4)-(1,2,3,4,5)
\end{array}
$$

Si, dans ce tableau, on supprime les termes qui se détruisent, il ne reste que le premier terme de chaque ligne de rang $(4n+1)$ et le dernier de chaque ligne de rang $4n$, et ces termes sont précisément les permutations de l'arrangement proposé.

On pourrait obtenir une vérification semblable en prenant les termes qui forment la première ligne des permutations de cet arrangement.

## § IV. — *Application des propriétés qui précèdent au développement des fonctions complexes.*

Les propriétés qu'on vient de découvrir concernant les permutations canoniques servent à démontrer les théorèmes suivants, sur le développement des fonctions complexes:

Théorème I. — *Si l'on développe une fonction* $(\varphi, \psi)$, *où* $\varphi$ *et* $\psi$ *sont canoniques, le résultat reste le même si l'on remplace préalablement la fonction* $\varphi$ *par son développement en fonctions canoniques.*

Quand on développe la fonction $(\varphi, \psi)$, on obtient une suite de termes composés de la fonction $\psi$ suivie des fonctions simples entrant dans $\varphi$ et disposées dans les différents termes suivant l'ordre indiqué par les permutations canoniques des indices de ces fonctions, le signe de chaque terme étant contraire de celui de la permutation correspondante.

Si, au lieu de cela, on suppose que la fonction $\varphi$ soit préalablement remplacée par son développement, on aura autant de développements analogues au précédent qu'il y a de termes dans celui de la fonction $\varphi$.

Or les permutations d'indices qui caractérisent les différents termes du développement de $\varphi$ sont obtenues en permutant les indices de $\varphi$, le dernier excepté, puis faisant précéder chacune de ces permutations par ce dernier indice et changeant les signes des différents termes. Plus simplement, cela revient à dire que ces permutations forment l'un des deux groupes en lesquels les permutations canoniques de tous les indices de $\varphi$ peuvent être classées, celles qui commencent par le dernier indice de cette fonction.

Cette simple remarque rend évident le théorème proposé, puisqu'on a prouvé (théorème III, § III) qu'en permutant les termes de l'un des deux groupes en question on reproduit seulement les permutations canoniques de l'arrangement primitif formé par les indices de la fonction $\varphi$.

*Remarque.* — La même chose n'a pas lieu pour la fonction $\psi$ dans $(\varphi, \psi)$; car, si l'on remplace cette fonction par son développement $\Sigma_k \psi_k$, on aura $(\varphi, \psi) = \Sigma_k (\varphi, \psi_k)$, ce qui donnera une suite de développements ne différant entre eux que par la fonction $\psi_k$ qui commence tous les termes d'un même développement. Le résultat sera donc différent de celui qu'on aurait obtenu si la fonction $\psi$ n'avait pas été développée. Mais si, dans ce dernier cas, on remplace $\psi$, dans le résultat obtenu, par son développement, on retombe sur le résultat obtenu dans le premier cas.

On peut donc remplacer $\psi$ par son développement, soit avant, soit après l'opération, sans changer le résultat; mais ce résultat est différent de celui qu'on obtient lorsque $\psi$ n'est pas remplacé par son développement.

*Corollaire.* — Le développement de la fonction complexe $(\varphi, \psi, \theta)$, où $\varphi$ est une fonction canonique, reste le même si l'on remplace la fonction $\varphi$ par son développement en fonctions canoniques.

THÉORÈME II. — *Si $\varphi$, $\psi$, F sont trois fonctions canoniques, le développement de $(\varphi, \psi, F)$ ne renferme aucun terme dans lequel les fonctions*

*simples de $\varphi$ soient interposées entre celles de $\psi$ ou inversement, les fonctions simples de $\psi$ entre celles de $\varphi$.*

Pour démontrer ce théorème, cherchons d'abord la forme du développement de $(\varphi, \psi, F)$.

Pour obtenir ce développement, il faudra d'abord former celui de $(\varphi, \psi)$, qui comprendra une suite de termes composés de la fonction $\psi$, suivie des fonctions simples de $\varphi$, dans un ordre qui, pour les différents termes, est indiqué par les diverses permutations canoniques des indices de $\varphi$, le signe de chaque terme étant contraire de celui qui répond à la permutation correspondante. Le développement de $(\varphi, \psi, F)$ s'obtiendra ensuite en développant les combinaisons de chaque terme du développement précédent avec la fonction F.

Soit $\pm \theta_r$ un terme quelconque de $(\varphi, \psi)$. Les indices des fonctions simples qui composent ce terme sont ceux de la fonction $\psi$, dans l'ordre où ils se trouvent dans cette fonction, suivis d'une permutation négative ou positive des indices de $\varphi$, suivant que le terme considéré est positif ou négatif. Ce terme $\pm \theta_r$ donnera, dans le développement de $(\varphi, \psi, F)$, une série de termes formés de la fonction F, suivie des fonctions simples de $\varphi$ et de $\psi$, dans un ordre qui est indiqué, pour les différents termes, par les permutations des indices de $\pm \theta_r$, chaque terme étant d'un signe opposé ou conforme à celui de $\theta_r$, suivant que la permutation correspondante des indices est positive ou négative.

Cela étant posé, en se reportant à la règle de composition des permutations d'un arrangement donné, on voit facilement :

1° Que, dans les diverses permutations des indices de $\theta_r$, les indices de la fonction $\varphi$ ne seront jamais intercalés entre ceux de $\psi$;

2° Que dans ces permutations entrent toutes celles des indices de $\psi$;

3° Que tous les termes qui renferment une même permutation des indices de $\psi$ pourraient être obtenus en permutant canoniquement un arrangement formé de celui de $\pm \theta_r$, en y remplaçant le groupe des indices de la fonction $\psi$ par une seule lettre $a$, cette lettre étant ultérieurement remplacée, dans les résultats, par la permutation des indices de $\psi$, qui est commune à tous les termes considérés, le signe de chaque permutation étant $+$ ou $-$, suivant que la permutation des indices de $\psi$ qu'elle renferme et la permutation correspondante, déduite

de l'arrangement, formé, comme on l'a dit, avec les indices de $\theta_r$, sont de même signe ou de signes contraires; le terme correspondant sera, comme on l'a dit, d'un signe contraire ou conforme à celui de $\theta_r$, suivant que sa permutation sera positive ou négative.

4° On voit enfin que la règle qui précède peut donner tout le développement de $(\varphi, \psi, F)$, en remplaçant $a$ successivement par toutes les permutations canoniques des indices de $\psi$.

Les remarques qui précèdent rendent évident le théorème énoncé. Il suffit de prouver, en effet, que les fonctions simples de $\psi$ ne sont, dans aucun terme du développement de $(\varphi, \psi, F)$, intercalées entre celles de $\varphi$.

Si l'on considère pour cela que les indices des termes, tels que $\pm\theta_r$, après que la lettre $a$ a été substituée aux indices de la fonction $\psi$, représentent celles qui commencent par $a$ des permutations obtenues de l'arrangement qui serait formé des indices de $\varphi$ suivis de $a$, il résulte du théorème III, § III, que, si l'on permute canoniquement ces groupes d'indices, on retrouvera les mêmes permutations jointes à celles qui compléteraient le tableau des permutations de l'arrangement qu'on vient de former, lesquelles se terminent toutes par $a$. Donc, en composant les termes du développement de $(\varphi, \psi, F)$, comme il vient d'être dit, on voit que ce développement ne contiendra aucun terme dans lequel les fonctions simples de $\psi$ soient intercalées entre celles de $\varphi$, ce qui, joint à la première remarque que nous avons faite ci-dessous, démontre le théorème énoncé.

Les termes du développement pourront donc être obtenus de la façon suivante. On formera toutes les permutations canoniques des indices de l'arrangement formé d'une lettre quelconque $a$, précédée des indices de $\varphi$. Dans chacune des permutations de ce tableau on remplacera $a$ successivement par chacune des permutations des indices de $\psi$, en conservant ou changeant le signe, suivant que la permutation considérée de $\psi$ est positive ou négative. Les permutations ainsi obtenues sont celles qui répondent aux différents termes de $(\varphi, \psi, F)$, chaque terme étant d'un signe contraire de celui de la permutation correspondante.

*Corollaire.* — On peut encore énoncer d'une autre façon la règle qui précède pour la composition des permutations d'indices répondant aux

différents termes de $(\varphi, \psi, F)$. Si l'on considère que chaque permutation, déduite de l'arrangement formé des indices de $\varphi$ suivis de $a$, est de signe contraire avec la permutation qu'on obtiendrait en supprimant cette lettre $a$, on pourra dire que *les permutations relatives au développement de* $(\varphi, \psi, F)$ *peuvent se former, en faisant successivement précéder et suivre chaque permutation des indices de* $\psi$ *de l'une des permutations des indices de* $\varphi$, *le signe du résultat étant dans le premier cas* $+$ *ou* $-$, *suivant que les deux permutations considérées sont de signes semblables ou différents, et le contraire dans le second cas, le signe de chaque terme étant d'ailleurs contraire de celui de la permutation correspondante.*

Théorème III. — *Si* F *est une fonction canonique et* $\theta$ *une combinaison de deux fonctions canoniques, le développement de la fonction* $(\theta, F)$ *sera le même, que l'on remplace* $\theta$ *par l'un ou l'autre des deux développements dont cette fonction est susceptible.*

Ce théorème, qui est une généralisation du théorème I, est une conséquence immédiate de celui qui précède.

Si l'on suppose que l'on ait $\theta = (\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi)$, il suffit de prouver que les deux fonctions $(\varphi, \psi, F)$ et $-(\psi, \varphi, F)$ ont des développements identiques. Si l'on considère, en effet, les indices d'un terme quelconque du premier développement, ils sont formés d'une permutation des indices de $\varphi$, précédée ou suivie d'une permutation des indices de $\psi$, le signe étant $+$ ou $-$, suivant que les deux permutations sont de même signe ou de signes contraires, quand les indices de $\varphi$ précèdent ceux de $\psi$, et l'inverse dans le cas contraire. Or le développement de $(\psi, \varphi, F)$ donnera une fois le même arrangement d'indices, mais avec un signe opposé, puisque l'ordre des deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ est maintenant renversé.

Donc les développements des fonctions $(\varphi, \psi, F)$ et $-(\psi, \varphi, F)$ sont bien identiques.

*Vérification.* — Nous vérifierons ce théorème, ainsi que le précédent, en formant directement les développements des fonctions $(\varphi, \psi, F)$ et $-(\psi, \varphi, F)$, dans l'hypothèse particulière où l'on a, par exemple,

$$\varphi = (f_1, f_2, f_3), \quad \psi = (f_4, f_5).$$

Il suffit de vérifier que les permutations canoniques des indices des

termes du développement de $(\varphi, \psi)$ sont bien les mêmes que celles des termes de $-(\psi, \varphi)$.

Les permutations répondant aux termes du premier développement sont

$$(4,5,1,2,3)-(4,5,2,1,3)-(4,5,3,1,2)+(4,5,3,2,1),$$

celles du second

$$-(1,2,3,4,5)+(1,2,3,5,4).$$

Si l'on permute chacun des arrangements composant le premier des deux groupes qui précèdent, on obtient le tableau suivant :

$$\begin{array}{l}
+(4,5,1,2,3)-(5,4,1,2,3)-(1,4,5,2,3)+(1,5,4,2,3)\\
-(2,4,5,1,3)+(2,5,4,1,3)+(2,1,4,5,3)-(2,1,5,4,3)\\
-(3,4,5,1,2)+(3,5,4,1,2)+(3,1,4,5,2)-(3,1,5,4,2)\\
+(3,2,4,5,1)-(3,2,5,4,1)-(3,2,1,4,5)+(3,2,1,5,4)\\
-(4,5,2,1,3)+(5,4,2,1,3)+(2,4,5,1,3)-(2,5,4,1,3)\\
+(1,4,5,2,3)-(1,5,4,2,3)-(1,2,4,5,3)+(1,2,5,4,3)\\
+(3,4,5,2,1)-(3,5,4,2,1)-(3,2,4,5,1)+(3,2,5,4,1)\\
-(3,1,4,5,2)+(3,1,5,4,2)+(3,1,2,4,5)-(3,1,2,5,4)\\
-(4,5,3,1,2)+(5,4,3,1,2)+(3,4,5,1,2)-(3,5,4,1,2)\\
+(1,4,5,3,2)-(1,5,4,3,2)-(1,3,4,5,2)+(1,3,5,4,2)\\
+(2,4,5,3,1)-(2,5,4,3,1)-(2,3,4,5,1)+(2,3,5,4,1)\\
-(2,1,4,5,3)+(2,1,5,4,3)+(2,1,3,4,5)-(2,1,3,5,4)\\
+(4,5,3,2,1)-(5,4,3,2,1)-(3,4,5,2,1)+(3,5,4,2,1)\\
-(2,4,5,3,1)+(2,5,4,3,1)+(2,3,4,5,1)-(2,3,5,4,1)\\
-(1,4,5,3,2)+(1,5,4,3,2)+(1,3,4,5,2)-(1,3,5,4,2)\\
+(1,2,4,5,3)-(1,2,5,4,3)-(1,2,3,4,5)+(1,2,3,5,4);
\end{array}$$

et, en opérant de même pour le second, on obtient le tableau qui suit :

$$\begin{array}{l}
-(1,2,3,5,4)+(2,1,3,4,5)+(3,1,2,4,5)-(3,2,1,4,5)\\
+(4,1,2,3,5)-(4,2,1,3,5)-(4,3,1,2,5)+(4,3,2,1,5)\\
+(4,1,2,3,5)-(5,2,1,3,4)-(5,3,1,2,4)+(5,3,2,1,4)\\
-(5,4,1,2,3)+(5,4,2,1,3)+(5,4,3,1,2)-(5,4,3,2,1)\\
+(1,2,3,5,4)-(2,1,3,5,4)-(3,1,2,5,4)+(3,2,1,5,4)\\
-(5,1,2,3,4)+(5,2,1,3,4)+(5,3,1,2,4)-(5,3,2,1,4)\\
-(4,1,2,3,5)+(4,2,1,3,5)+(4,3,1,2,5)-(4,3,2,1,5)\\
+(4,5,1,2,3)-(4,5,2,1,3)-(4,5,3,1,2)+(4,5,3,2,1),
\end{array}$$

Dans chacun de ces deux tableaux on voit que les termes pour lesquels les indices de $\psi$ sont intercalés entre ceux de $\varphi$, ou inversement, se détruisent deux à deux, ce qui vérifie le théorème II; puis, lorsque ces réductions sont effectuées, on constate que les deux tableaux restent composés des mêmes termes, ce qui vérifie le théorème III.

## § V. — *Relations entre les fonctions canoniques.*

Nous avons prouvé que toutes les fonctions complexes s'exprimaient linéairement en fonctions canoniques; mais ces dernières ne sont pas toutes distinctes. Nous avons, en effet, déjà vu qu'une fonction canonique quelconque se développait linéairement en fonction de la même espèce. En outre, d'après la définition de l'opération représentée par le symbole $(\varphi, \psi)$, il résulte que l'on a, entre deux fonctions quelconques, $\varphi$ et $\psi$, l'*identité binôme*

$$(\varphi, \psi) + (\psi, \varphi) = 0 \tag{11}$$

et entre trois fonctions quelconques, $\varphi$, $\psi$, $\theta$, l'*identité trinôme*

$$(\varphi, \psi, \theta) + (\theta, \varphi, \psi) + (\psi, \theta, \varphi) = 0. \tag{12}$$

Les relations déduites de la formule (11) peuvent être considérées comme exprimant l'égalité entre les deux développements dont la fonction $(\varphi, \psi)$ ou $-(\psi, \varphi)$ est susceptible.

Si l'on développe en fonctions canoniques chacun des termes des formules qui précèdent, on obtiendra de nouvelles relations entre des fonctions canoniques toutes les fois que le résultat ne sera pas identique.

Remarquons dès à présent que l'on peut considérer les relations fournies par le développement des fonctions canoniques comme données par l'identité binôme (11), en supposant que $\varphi$ soit une fonction quelconque et $\psi$ une fonction simple.

Aux relations qui précèdent il faut adjoindre celles qu'on obtiendrait en combinant toutes les fonctions qui entrent dans une même relation avec une ou plusieurs fonctions nouvelles. A chacun des groupes de relations données par les formules (11) et (12) on adjoindra donc les

relations nouvelles qui seraient déduites de celles de chaque groupe par l'opération qu'on vient d'indiquer. C'est dans ce sens que nous dirons que toutes les relations sont fournies par les identités (11) et (12). Leur nombre sera assez considérable pour qu'il y ait lieu de se demander si, à partir d'un certain rang, toutes les fonctions obtenues ultérieurement ne sont pas fonctions des précédentes ou simplement déterminées; ou, en d'autres termes, si les diverses fonctions qu'on peut déduire d'un groupe donné de fonctions, par l'opération réitérée dont nous nous occupons, ne forment pas un cycle fermé.

Nous nous proposons de démontrer que cela n'a pas lieu, et, pour cela, nous devons rechercher les liaisons qui rattachent entre elles les relations diverses qu'on peut déduire des identités (11) et (12). C'est ce que nous ferons par les théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. — *Si l'on suppose que certaines des fonctions considérées dans les identités* (11) *et* (12) *ne soient pas canoniques, les relations déduites de ces identités ne sont pas distinctes; elles résultent des relations qu'on obtient quand toutes les fonctions qui y entrent sont canoniques.*

Supposons, en effet, que la fonction $\varphi$ ne soit pas canonique : elle se développera en fonctions de cette denière espèce, et l'on aura

$$\varphi = \Sigma_k \varphi_k,$$

les diverses fonctions $\varphi_k$ étant canoniques et prises avec un signe convenable.

L'identité (11) peut alors s'écrire

$$\Sigma_k[(\varphi_k, \psi) + (\psi, \varphi_k)] = 0,$$

et comme, pour toutes les valeurs de $k$, on a

$$(\varphi_k, \psi) + (\psi, \varphi_k) = 0, \tag{13}$$

le théorème est démontré pour l'identité binôme, si $\psi$ est une fonction canonique. Si le contraire a lieu, on raisonnera comme précédemment sur chacune des identités (13), en remplaçant $\psi$ par son développement.

Si l'on considère l'identité (12), elle devient aussi

$$\Sigma_k[(\varphi_k, \psi, \theta) + (\theta, \varphi_k, \psi) + (\psi, \theta, \varphi_k)] = 0,$$

et les conséquences sont les mêmes que pour la première identité.

*Remarque.* — Il résulte de ce théorème que, pour déduire des formules (11) et (12) toutes les relations qu'elles peuvent fournir entre des fonctions canoniques, il suffit de supposer que toutes les fonctions qui y sont considérées soient elles-mêmes canoniques.

Mais on sait qu'une fonction canonique peut être égalée à un développement convenable de fonctions de la même espèce, et l'on doit se demander si les relations déduites des identités (11) et (12) restent les mêmes quand une fonction canonique y est remplacée par son développement.

Considérons d'abord la formule (11). Si l'on suppose que la fonction $\varphi$ y soit remplacée par son développement en fonctions canoniques, d'après le théorème I, § IV, le développement de $(\varphi, \psi)$ ne sera pas changé. Quant à celui de $(\psi, \varphi)$, il ne restera pas le même; mais il est facile de voir que, néanmoins, la relation obtenue n'est pas distincte de celle que l'on a quand la fonction $\varphi$ n'est pas préalablement remplacée par son développement. En effet, chaque terme de ce dernier développement de $(\varphi, \psi)$ est remplacé par un groupe de termes qui seraient obtenus du terme considéré en y remplaçant $\varphi$ successivement par les différents termes de son développement. Or l'égalité de ce terme et du développement par lequel il est remplacé fait l'objet d'une relation déjà établie et dont on peut se servir pour la transformation des relations ultérieures.

Quant à la formule (12), comme, dans la suite, nous ne nous proposerons de conserver, parmi les relations qui s'en déduisent, que celles qui ne pourraient être fournies par la formule (11), nous pourrons, dans l'étude des relations que donne la formule (12), employer comme moyen de transformation toutes celles qui dérivent de la première formule.

En remplaçant dans (12) la fonction $\varphi$ par son développement, celui du terme $(\varphi, \psi, \theta)$ ne sera pas modifié (théorème I, § IV). Comme, d'après ce qui précède, on peut remplacer, dans $(\theta, \varphi)$, la fonction $\varphi$ par son développement, celui de $(\theta, \varphi, \psi)$, lorsque $\varphi$ est développée, résul-

tera du développement que l'on a dans le cas contraire, et cela en vertu de relations antérieurement établies. La même chose a lieu pour le terme $(\psi, \theta, \varphi)$.

Donc, en restant dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placé, on pourra, dans les formules (11) et (12), remplacer les fonctions canoniques qui y entrent par leurs développements en fonctions canoniques, sans obtenir des relations distinctes des précédentes.

Nous nous proposons de chercher maintenant quelles sont les relations distinctes que peuvent donner les formules (11) et (12).

THÉORÈME II. — *La formule* (12) *ne peut donner qu'une seule relation entre trois fonctions données, quel que soit l'ordre suivant lequel ces fonctions sont introduites dans cette formule.*

Entre ces trois fonctions $\varphi$, $\psi$, $\theta$ il ne peut exister que les deux identités suivantes :

$$(\varphi, \psi, \theta) + (\theta, \varphi, \psi) + (\psi, \theta, \varphi) = 0, \tag{14}$$

$$(\psi, \varphi, \theta) + (\theta, \psi, \varphi) + (\varphi, \theta, \psi) = 0, \tag{15}$$

puisqu'il n'y a que six permutations ordinaires entre ces trois fonctions, et que deux identités trinômes deviennent conformes l'une à l'autre aussitôt qu'elles ont un terme commun.

Cela posé, d'après le théorème III, § IV, les développements des termes de la formule (14) seront respectivement identiques à ceux des fonctions suivantes :

$$-(\psi, \varphi, \theta), \quad -(\varphi, \theta, \psi), \quad -(\theta, \psi, \varphi),$$

et les développements des formules (14) et (15) seront identiques.

THÉORÈME III. — *Toute relation déduite de l'identité trinôme, en supposant que l'une des fonctions soit simple et les autres canoniques, est aussi donnée par l'identité binôme* (11) *entre deux fonctions canoniques convenablement choisies.*

Soit l'identité

$$(f, \psi, \varphi) + (\varphi, f, \psi) + (\psi, \varphi, f) = 0. \tag{16}$$

Pour développer le premier terme de cette formule, on aura d'abord

$$(f, \psi) = -(\psi, f),$$

et l'on devra, par suite, développer la fonction $-(\psi, f, \varphi)$.

Mais, d'après la règle posée, le développement de $-(\psi, f, \varphi)$ se compose de deux séries de termes que l'on déduit du développement de $-(\psi, \varphi)$ : les premiers, en plaçant la lettre $f$ à la suite des lettres qui composent chaque terme de ce développement, les signes étant conservés; les seconds, en plaçant dans chaque terme du premier développement la lettre $f$ immédiatement après $\varphi$ et changeant tous les signes.

Le second groupe de termes est le développement de $+[\psi, (\varphi, f)]$. Quant au premier, il est *égal* à $-(\psi, \varphi, f)$, mais *non pas identique* au développement de cette fonction; car, après avoir placé la lettre $f$ à la suite de celles qui composent chacun des termes du développement de $(\psi, \varphi)$, on devrait, pour obtenir le développement de la fonction $-(\psi, \varphi, f)$, remplacer les termes obtenus, quoique canoniques, par leurs développements en fonctions de la même nature; mais, comme ces égalités entre chaque fonction canonique et son développement constituent des relations déjà fournies par les identités binômes, on pourra s'en servir pour les transformations actuelles, et supposer que le groupe de termes dont l'ensemble est simplement égal à la fonction $-(\psi, \varphi, f)$ soit remplacé par le développement de cette fonction.

Il résulte de là que le développement du premier terme de la formule (16) est égal au développement de $[\psi, (\varphi, f)]$ diminué de celui de $(\psi, \varphi, f)$.

Substituant dans la formule (16), on conclura que la relation déduite de cette formule est la même que celle que donnerait la relation binôme suivante :

$$[\psi, (\varphi, f)] + [(\varphi, f), \psi] = 0. \tag{17}$$

La démonstration précédente subsiste dans le cas où il entre plusieurs fonctions simples dans l'identité trinôme.

*Corollaire.* — La formule (12) ne pourra conduire à des relations distinctes que dans le cas où aucune des trois fonctions canoniques $\psi$, $\theta$, $\varphi$ n'est simple.

THÉORÈME IV. — *Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions canoniques quelconques, la relation fournie par l'identité* $(\varphi, \psi) + (\psi, \varphi) = 0$ *n'est pas changée si l'on détache la dernière fonction simple entrant dans la composition de $\varphi$ pour la combiner à la fonction $\psi$ ou réciproquement.*

Soit $\varphi = (\varphi_1, f)$. On sait que les deux identités trinômes

$$(\varphi_1, f, \psi) + (\psi, \varphi_1, f) + (f, \psi, \varphi_1) = 0,$$
$$(\psi, f, \varphi_1) + (\varphi_1, \psi, f) + (f, \varphi_1, \psi) = 0$$

donnent respectivement les mêmes relations que les identités binômes

$$[(\varphi_1, f), \psi) + [\psi, (\varphi_1, f)] = 0,$$
$$[(\psi, f), \varphi_1) + [\varphi_1, (\psi, f)] = 0.$$

Or, d'après le théorème II, les deux identités trinômes donnent la même relation; donc il en doit être ainsi des deux identités binômes qui leur correspondent.

On déduit de ce théorème la conséquence importante qui suit :

THÉORÈME V. — *On obtient toutes les relations distinctes que peut donner la formule* (11), *en supposant que l'une des fonctions qui y entrent soit simple, et l'autre une fonction canonique quelconque.*

Car, d'après le théorème qui précède, on peut, sans changer la relation correspondante, détacher une à une les fonctions simples de $\varphi$ pour les combiner à $\psi$, et cela jusqu'à ce que $\varphi$ soit réduite à une fonction simple.

De tout ce qui précède il résulte que l'*on aura toutes les relations qui existent entre les fonctions canoniques :*

1° De l'identité binôme (11), en supposant que l'une des fonctions qui y entrent soit simple, et l'autre canonique, ou, ce qui revient au même, en exprimant l'égalité entre chaque fonction canonique et son développement en fonctions de la même espèce ;

2° De l'identité trinôme (12) si aucune des fonctions canoniques qui y entrent ne se réduit à une fonction simple;

3° Enfin en combinant les termes des diverses relations ainsi obtenues avec une ou plusieurs fonctions simples, les mêmes dans le même ordre pour tous les termes d'un même développement.

Le nombre des relations du troisième groupe peut être réduit au moyen du théorème suivant :

Théorème VI. — *Les relations du troisième groupe, déduites de celles du premier, ne sont pas distinctes : elles résultent d'autres relations de ce premier groupe.*

Considérons, en effet, la relation qu'on obtient en égalant une fonction canonique $\varphi$ à son développement et combinant les différents termes de cette égalité à une fonction simple $f$.

On sait (théorème I, § IV) que, si l'on développe tous les termes de la nouvelle relation qu'on vient d'obtenir, on doit arriver à une identité. Or l'égalité entre chaque terme de cette relation et son développement constitue une relation du premier groupe; donc la nouvelle relation n'est pas une relation distincte, mais bien la conséquence d'autres relations du premier groupe.

*Remarque.* — Dans les applications, les relations de l'espèce considérée ne devront pas être rejetées; car, étant plus simples que celles du même ordre dans le premier groupe, il y a avantage à s'en servir pour écarter un nombre égal de relations de ce groupe.

Théoriquement, on se bornera aux relations des deux premiers groupes et à celles du troisième qui résultent de celles du second.

Mais *ces diverses relations ne sont pas encore toutes distinctes.*

Il en doit être ainsi *a priori*, puisque le premier des trois groupes qui précèdent donnerait à lui seul autant de relations entre les fonctions canoniques d'un ordre quelconque qu'il y a de fonctions de cet ordre.

Aussi, dans la pratique, on développera toutes les relations des trois groupes qui précèdent, et, par des éliminations très-simples, eu égard à la forme des relations, il sera toujours facile de déterminer quelles sont celles qui sont distinctes.

On pourrait même se proposer de déterminer d'une manière générale ces dernières relations; mais cela étendrait outre mesure les dimensions de ce travail, et, d'ailleurs, pour le but que nous nous sommes surtout proposé d'atteindre, à savoir que les fonctions déduites des proposées ne forment pas, en général, un cycle fermé, il suffirait d'établir que, *parmi les fonctions d'un ordre quelconque, il en est toujours un certain nombre qui peuvent être considérées comme n'étant fonction d'aucune autre.*

Si de telles fonctions existent, les relations qui leur correspondent dans le premier groupe doivent se réduire à des identités.

Proposons-nous donc de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. — *Chercher s'il existe des fonctions canoniques dont le développement se réduise à la fonction développée elle-même.*

Remplaçons, pour plus de simplicité, les fonctions simples par leurs indices respectifs, et soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda, \omega)$ une fonction canonique quelconque où $\alpha$ est nécessairement différent de $\beta$.

Si l'on développe cette fonction, tous les termes obtenus commencent par $\omega$; donc l'identité ne peut exister qu'autant que $\omega = \alpha$. Supposons que cela ait lieu, et considérons le seul terme du développement où $\beta$ soit, comme dans la fonction proposée, au second rang. Ce terme, qui est le suivant, $+(\omega, \beta, \alpha, \gamma, \delta, \ldots, \lambda)$, est le seul qui, sans hypothèse particulière sur $\beta$, puisse être identique au proposé. Mais cette identité exige encore que l'on ait

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \gamma, \quad \ldots, \quad \omega = \lambda,$$

et, comme $\omega = \alpha$, on aura

$$\alpha = \gamma = \delta = \ldots = \lambda = \omega.$$

Il est d'ailleurs évident que, si ces conditions sont remplies, tous les autres termes du développement deviennent identiquement nuls.

Les fonctions de la forme $(\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$, où $\beta$ et $\alpha$ sont quelconques, mais différents, résoudront donc le problème proposé.

Il faut encore se demander si ces fonctions peuvent entrer dans le développement d'une autre fonction. Cette fonction, si elle existe, ne renferme qu'un indice égal à $\beta$, tous les autres étant égaux à $\alpha$; il n'y aura donc que la fonction considérée et la suivante $(\beta, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ qui satisfassent à cette condition; donc cette dernière fonction peut seule satisfaire à la dernière question posée. D'ailleurs, en appliquant la règle du développement à cette fonction, on trouve la relation

$$(18) \qquad (\beta, \alpha, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha) + (\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha) = 0,$$

tous les autres termes étant identiquement nuls.

Enfin il est évident que les fonctions de la forme considérée ne peuvent se rencontrer dans les relations du second groupe.

On devra donc considérer les fonctions de la forme $(f_\alpha, f_\beta, f_\alpha, \ldots, f_\alpha)$ comme n'étant fonction d'aucune autre. Les seules relations, telles que l'équation (18), où elles puissent entrer seront considérées comme donnant la valeur, en fonction des précédentes, des fonctions de la forme $(f_\beta, f_\alpha, \ldots, f_\alpha)$, lesquelles, d'ailleurs, n'entrent dans aucune autre relation.

Si donc $m$ est le nombre des fonctions simples, le nombre des fonctions canoniques d'un ordre quelconque qui ne s'expriment pas en fonction des autres est égal à $m(m-1)$.

On pourra donc énoncer la conclusion suivante : *Le nombre des fonctions distinctes que l'on peut déduire d'un groupe de fonctions données, par des combinaisons successives, est, en général, illimité.*

# ÉTUDES

RELATIVES A

# LA DÉCOMPOSITION DES SELS MÉTALLIQUES

## SOUS L'INFLUENCE DE L'EAU

(PREMIÈRE PARTIE);

PAR M. ALFRED DITTE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Lorsqu'on met un sel en contact avec de l'eau, celle-ci peut agir sur lui de deux manières bien différentes : elle peut jouer le rôle d'un simple dissolvant, et alors la dissolution s'accomplit suivant des lois bien connues; la quantité de sel dissous varie d'une manière régulière avec la température du liquide, avec la nature et la proportion des substances étrangères que celui-ci contient déjà. Les courbes de solubilité figurent très-nettement ces résultats.

Mais l'action de l'eau peut être plus complexe : souvent elle décompose le sel qu'on y introduit, tout entier ou en partie, et le phénomène se complique de la dissolution des éléments désunis et de celle de la matière qui reste non altérée. Or cette décomposition ne s'effectue pas d'une manière quelconque, bien au contraire; il résultera, je l'espère, de la suite de ce travail qu'elle est soumise à des lois bien déterminées et fort simples, desquelles nous pourrons déduire quelques conséquences intéressantes.

Nous étudierons d'abord les particularités que présentent quelques cas des plus simples. Après les avoir analysées avec soin, il sera facile de passer à l'examen de phénomènes plus compliqués.

## I. — *Sulfate de bioxyde de mercure* $HgO, SO^3$.

Au contact de l'eau et à la température ordinaire, le sulfate de bioxyde de mercure se colore immédiatement; une poudre jaune orangé se précipite et, en vertu de sa grande densité, se rassemble rapidement au fond du vase. L'analyse montre que ce précipité renferme trois fois plus de mercure pour un même poids d'acide que le sel primitif; par suite, sa composition correspond à la formule connue $3HgO, SO^3$. L'eau est devenue fortement acide; et, en effet, le sel neutre $HgO, SO^3$ n'a pu se changer en sous-sulfate $3HgO, SO^3$ qu'en abandonnant les deux tiers de son acide sulfurique. La réaction continue ainsi, quand on ajoute peu à peu du sel neutre, jusqu'à ce que la proportion d'acide mis en liberté atteigne une certaine valeur limite. A partir de ce moment, l'eau ne s'enrichit plus en acide, le sulfate n'est plus décomposé, mais simplement dissous, et l'on n'observe sur lui aucune coloration. Enfin la liqueur finit par se saturer et le sel neutre introduit en excès reste sans altération, mélangé au sous-sulfate précipité.

Il est possible, en tâtonnant, d'obtenir directement une dissolution d'acide sulfurique telle que, suivant que l'on augmente ou que l'on diminue la proportion d'acide qu'elle renferme, elle dissout ou décompose le sulfate neutre de mercure; on trouve qu'elle contient par litre 67 grammes environ (les nombres trouvés varient de 66,4 à 68) d'acide sulfurique anhydre à la température de 12 degrés.

Cette liqueur acide, sans action chimique sur le sulfate neutre, n'en a pas davantage quand on l'a préalablement saturée de sous-sulfate, dont elle dissout par litre 37 grammes environ. Le phénomène de contraction ou de dilatation qui résulte de la dissolution du sous-sulfate suffit pour masquer la légère décomposition que ce sel dissous pourrait éprouver sous l'influence de l'acide sulfurique en excès. La présence du sous-sulfate dissous paraît donc sans influence sur la réaction; il en est de même de celle du sulfate neutre, la liqueur acide ne l'attaquant pas plus quand elle en a déjà dissous une certaine quantité que lorsqu'elle n'en renfermait pas encore.

Le sous-sulfate de mercure, insoluble dans l'eau pure, se dissout avec facilité dans les acides étendus (acides chlorhydrique, azotique, acétique, etc.). Il est donc naturel d'admettre que si, comme dans l'expérience ci-dessus, il se trouve en présence d'eau chargée d'acide sulfurique, il se dissoudra également. Lors donc qu'on verse de l'eau sur du sel neutre, la dissolution peut contenir à la fois de l'acide sulfurique libre, du sulfate neutre de mercure et du sous-sulfate, tous deux dissous; c'est ce que nous allons étudier avec détails.

Mélangeons une solution sulfurique contenant par litre un poids connu d'acide avec du sous-sulfate pur et en excès. Il suffit d'agiter fréquemment pour que la dissolution de ce dernier s'effectue. Tant que la liqueur employée ne contiendra pas 67 grammes d'acide par litre, comme elle ne peut se trouver en présence du sel neutre sans le décomposer, elle dissoudra simplement du sous-sulfate et devra gagner une quantité d'acide qui, comparée au poids d'oxyde de mercure que l'on y trouve, devra satisfaire à la formule $3HgO, SO^3$. C'est ce que l'expérience confirme avec une remarquable précision, si l'on a égard aux difficultés que présente le dosage du mercure et au degré d'approximation qu'il comporte. Voici des nombres obtenus en opérant à 12 degrés au-dessus de zéro et rapportés tous à 1 litre de liqueur :

| $SO^3$ au début de l'expérience. | $SO^3$ à la fin de l'expérience. | HgO dissous à l'état de sous-sulfate. | Observations. |
|---|---|---|---|
| gr 6,0 | gr 6,2 | gr 1,3 | La liqueur décompose le sel neutre au commencement comme à la fin de l'expérience. |
| 18,0 | 19,0 | 7,1 | » |
| 32,4 | 34,1 | 14,8 | » |
| 45,4 | 48,4 | 21,4 | » |
| 64,0 | 67,8 | 31,4 | » |
| 67,0 | 71,2 | 33,6 | La liqueur ne décompose plus le sel neutre. |
| 76,0 | 86,6 | 77,2 | » |

Si maintenant nous prenons des abscisses correspondant au poids d'acide initial et des ordonnées représentant les poids d'oxyde de mercure dissous à l'état de sous-sulfate, nous obtiendrons une courbe qui figurera pour nous les variations de solubilité du sous-sulfate à la température de 12 degrés, quand on fait varier la concentration de la li-

queur acide employée; cette courbe est sensiblement la droite dont l'équation est

$$y = 0{,}508x - 1{,}778;$$

toutefois l'ordonnée 77,2 est de beaucoup supérieure à celle qui devrait correspondre à l'abscisse 76, si nous voulions prolonger la droite au delà de l'abscisse 67, c'est-à-dire au delà de la limite que nous nous sommes imposé de ne pas dépasser. Nous savons, en effet, que la liqueur acide qui contient 67 grammes de $SO^3$ par litre ne se comporte plus avec le sel neutre comme celles qui sont moins concentrées; elle peut le dissoudre sans le décomposer.

Or, admettons pour un instant que, dans ces circonstances, la quantité d'acide qui excède 67 grammes, dans la liqueur mise en présence d'un excès de sous-sulfate, puisse se combiner avec une quantité convenable de ce composé pour reformer du sel neutre qui sera également dissous. S'il en est ainsi, dès qu'on dépassera le degré de concentration limite, la quantité d'oxyde de mercure dissous, correspondant à un poids déterminé d'acide initial, devra augmenter brusquement, et l'on devra observer dans la courbe de solubilité une discontinuité; car, jusque-là, pour un accroissement de 10 grammes dans l'acide initial, nous avions une augmentation de 5 grammes environ dans le poids d'oxyde, tandis que, si ces 10 grammes sont employés à former du sulfate neutre, ils introduiront dans la liqueur autant d'oxyde de mercure qu'il en correspond dans le sous-sulfate à 5 grammes d'acide, c'est-à-dire $40^{gr},5$.

Si nous interprétons ainsi la dernière expérience de notre tableau, nous serons conduits à prendre, sur les $86^{gr},6$ d'acide total, 67 grammes, qui dissolvent 33,6 d'oxyde, lesquels sont unis à $4^{gr},2$ d'acide, pour former 37,8 de sous-sulfate; il nous reste alors $86{,}6 - 67 - 4{,}2 = 15{,}4$, qui, avec les $77{,}2 - 33{,}6 = 43{,}6$ d'oxyde, forment bien du sulfate neutre.

La courbe de solubilité nous permettrait d'arriver par le calcul au même résultat et nous fournit ainsi une vérification intéressante. Elle permet de calculer directement la quantité minimum d'acide sulfurique libre nécessaire pour empêcher la décomposition du sulfate neutre. Soit, en effet, $x$ cette quantité; elle dissoudra, à l'état de sous-sulfate,

un poids d'oxyde de mercure représenté par $y = 0,508x - 1,778$, et l'acide sulfurique combiné à cet oxyde dans le sous-sulfate sera $\frac{1}{8}y$. Si $z$ est la quantité d'oxyde de mercure dissoute à l'état de sel neutre, l'acide sulfurique qui lui est combiné pèsera $0,3722z$ et l'on aura

$$x + \tfrac{1}{8}(0,508x - 1,778) + 0,3722z = A,$$
$$(0,508x - 1,778) + z = B,$$

A et B étant les quantités totales d'acide et d'oxyde que l'on trouve dans les liqueurs. En prenant pour A et B les nombres 86,6 et 77,2 de notre dernière expérience, on trouve

$$x = 66,4;$$

l'ordonnée qui correspond sur la courbe de solubilité à cette abscisse est 33,2; elle représente le poids d'oxyde dissous à l'état de sous-sulfate et combiné à $4^{gr},2$ d'acide. Il reste, en outre, $86,6 - 66,4 - 4,2 = 16,0$ d'acide et $77,2 - 33,2 = 44$ d'oxyde, qui sont bien dans les proportions exigées par la formule $HgO, SO^3$.

Nous ne nous sommes pas contenté de cette vérification pour conclure que la liqueur, renfermant plus de 67 grammes d'acide, mise en présence d'un excès de sous-sulfate, reforme du sel neutre qui se retrouve en dissolution. Nous avons varié les expériences et nous avons constamment trouvé qu'après la dissolution la composition de la liqueur peut être représentée comme ci-dessus.

1° Comme précédemment, on met en présence d'un excès de sous-sulfate une liqueur contenant plus de 67 grammes d'acide; quand, au bout de plusieurs jours, la réaction est terminée, on dose les quantités A et B d'acide et d'oxyde total. Si alors on prend $A - 67 - 4,2 = a$ et $B - 33,2 = b$, $a$ et $b$ doivent être dans les proportions indiquées par la formule $SO^3, HgO$.

On peut aussi, en s'appuyant sur le calcul effectué à l'aide de la courbe de solubilité, décomposer l'oxyde de mercure B en deux parties : l'une constante, 33,2, l'autre variable; séparer de même de la quantité A d'abord $4^{gr},2$ qui, avec 33,2 d'oxyde, font du sous-sulfate, puis une quantité d'acide qui, avec le reste de l'oxyde, forme du sel neutre, c'est-à-dire les $\frac{10}{27}$ de cet oxyde. Ce qui restera d'acide sera con-

sidéré comme libre et l'on devra trouver le nombre 67. Voici quelques résultats :

| $SO^3$ total. | HgO total. | $SO^3$ libre. |
|---|---|---|
| gr 91,6 | gr 850 | gr 68,2 |
| 98,6 | 1034 | 68,5 |
| 99,6 | 1112 | 66,4 |

2° On verse de l'eau pure ou de l'eau acidulée sur un excès de sel neutre ; une partie de ce sel se décompose, une autre se dissout, et à la fin de l'expérience il reste du sous-sulfate en excès, c'est-à-dire qu'on se retrouve, par une voie différente, dans les mêmes conditions que tout à l'heure. Le même calcul conduit aux mêmes conséquences. Voici les résultats des expériences :

| $SO^3$ total. | HgO total. | $SO^3$ libre. |
|---|---|---|
| gr 1140 | gr 1552 | gr 68,1 |
| 992 | 1080 | 67,2 |
| 1166 | 1596 | 68,6 |
| 1026 | 1206 | 66,0 |
| 1190 | 1564 | 68,2 |

3° Prenons une liqueur sulfurique avec du sous-sulfate et du sel neutre et faisons varier eau, acide, sous-sulfate ou sel neutre, en terminant toujours par une liqueur saturée de sous-sulfate et ne décomposant plus le sel neutre, nous serons conduits aux mêmes résultats. Voici les nombres trouvés :

| | $SO^3$ total. | HgO total. | $SO^3$ libre. |
|---|---|---|---|
| Eau et sulfate neutre en excès..... | gr 1218 | gr 1674 | gr 67,6 |
| Après addition d'eau et de sulfate neutre..... | 1238 | 1732 | 67,6 |
| Après addition de sous-sulfate après deux jours. | 1244 | 1716 | 68,5 |
| Après addition de sous-sulfate après douze jours de contact..... | 1236 | 1698 | 68,6 |
| Après addition de sulfate neutre..... | 1298 | 1900 | 67,2 |
| Après addition d'eau..... | 1140 | 1442 | 68,4 |
| Après nouvelle addition d'eau..... | 1030 | 1144 | 68,6 |
| Après addition de sous-sulfate et d'eau..... | 884 | 818 | 66,2 |
| Après addition d'eau et de sulfate neutre..... | 1190 | 1564 | 68,2 |
| Après addition d'eau..... | 982 | 1028 | 68,0 |
| Après addition de sous-sulfate..... | 984 | 1034 | 68,3 |

Comme l'addition d'une très-faible quantité d'eau ($\frac{1}{100}$ environ du

volume de la liqueur) suffit pour donner un précipité de sous-sulfate dans une liqueur contenant 67 grammes d'acide libre et du sulfate neutre dissous, les nombres qui représentent l'acide libre peuvent être regardés comme obtenus avec une approximation suffisante (1).

Ainsi donc, à 12 degrés, température des expériences, l'eau contenant par litre moins de 67 grammes d'acide décompose le sel neutre, s'empare de l'acide mis en liberté et se sature de sous-sulfate. Dès qu'elle arrive à contenir 67 grammes d'acide libre, la décomposition du sel neutre cesse d'avoir lieu, et les divers éléments du système se trouvent dans un certain état d'équilibre relatif (2). Si l'on vient à rompre cet équilibre en ajoutant de l'eau, de l'acide, du sous-sulfate ou du sel neutre, la dissolution se modifie dans tous les cas, de telle sorte que, quel que soit le point de départ, on finit toujours par aboutir à une liqueur contenant cette quantité 67 d'acide libre; elle cède de l'acide au sous-sulfate tant qu'elle dépasse cette limite, et en emprunte au sulfate neutre tant qu'elle reste au-dessous. Ce dernier se décompose donc ou se régénère jusqu'à ce que la liqueur arrive à ce degré limite de concentration qui constitue pour elle, à 12 degrés, un état d'équilibre stable, indépendant, en apparence, des quantités de sous-sulfate et de sulfate neutre qui se trouvent dans la liqueur. Ces éléments peuvent cependant jouer un certain rôle, mais l'influence de l'acide sulfurique est seule accessible à l'expérience; celle des autres corps est de l'ordre

---

(1) Il existe une cause de perturbation dont il faut tenir grand compte. Quand on ajoute une quantité d'eau un peu notable, le précipité orangé est immédiat; mais, avec des proportions d'eau très-faibles, il peut mettre plusieurs jours à se manifester; le sous-sulfate reste dans la liqueur à l'état de solution sursaturée. [*Voir*, pour des phénomènes analogues, le Mémoire de M. Marignac *Sur la solubilité du sulfate de chaux et l'état de sursaturation de ses dissolutions* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. I, p. 275).] Il faut agiter fréquemment la liqueur pour en bien mélanger les différentes parties, et, quand les cristaux orangés apparaissent, on les voit augmenter par une agitation répétée qui met les cristaux déjà formés en contact avec toutes les parties de la liqueur. Toutefois celle-ci n'atteint que lentement sa composition définitive, et, dans certains cas, avec des liqueurs étendues, j'ai dû attendre 50 jours que la sursaturation eût cessé entièrement.

(2) Cet état d'équilibre est, sous certains rapports au moins, comparable aux phénomènes d'équilibre et de limite découverts par MM. Berthelot et Péan de Saint-Gilles dans l'action des acides sur les alcools. [*Recherches sur les affinités; formation et décomposition des éthers* (*Annales de Chimie et de Physique*, t. LXV, p. 385 et suiv.; t. LXVI, p. 5 et suiv.; t. LXVIII, p. 225 et suiv.)]

des erreurs d'observation, et la sensibilité de la méthode ne va pas jusqu'à pouvoir la constater.

Lorsqu'à une dissolution limpide de sulfate neutre saturée de sous-sel et chargée d'acide on ajoute des quantités d'eau de plus en plus grandes, du sous-sulfate se précipite d'autant moins vite que la liqueur est plus étendue. Celle-ci revient d'abord à son degré de concentration limite, mais l'eau ajoutée augmentant sans cesse le sulfate neutre finit par disparaître entièrement. Le mercure qui reste alors dans la liqueur s'y trouve tout entier à l'état de sous-sulfate et précisément dans la proportion indiquée par la courbe de solubilité de ce sel que nous avons précédemment déterminée.

Le sous-sulfate qui se dépose dans ces circonstances est très-nettement cristallisé : ce sont de petits prismes orangés à six pans, souvent surmontés de pyramides à six faces. Les cristaux, courts et transparents, sont souvent striés perpendiculairement aux arêtes latérales du prisme et fréquemment accolés en groupes plus ou moins compliqués.

La dissolution d'acide sulfurique qui, à 12 degrés, cesse de décomposer le sel neutre, l'attaque et le jaunit dès qu'on élève sa température. Si l'échauffement est faible, il ne se produit que peu de sous-sulfate, et, par le refroidissement, il disparaît au bout de quelques heures (1). On voit donc que la quantité minimum d'acide sulfurique libre qu'une dissolution acide doit contenir pour ne pas décomposer le sulfate neutre de mercure augmente quand la température s'élève; on s'explique facilement alors pourquoi une dissolution limpide de sel neutre dans de l'eau aiguisée de 67 grammes d'acide sulfurique par litre se trouble quand on la chauffe; le sel neutre dissous se dédouble en partie ou en totalité, afin de fournir à la liqueur l'acide sulfurique libre qui lui manque pour atteindre le minimum de concentration qui correspond à la température considérée.

La présence d'un acide étranger dans la liqueur ne change rien à l'ensemble des phénomènes que nous venons de décrire. Prenons, par exemple, une dissolution quelconque d'acide chlorhydrique, divi-

(1) Le sous-sulfate, qui se dépose par l'action de la chaleur, est aussi bien cristallisé que celui qu'on obtient en additionnant d'eau une solution de sulfate neutre. Il répond exactement comme lui à la formule $3\,HgO, SO^3$.

sons-la en deux parties et saturons-en une de sous-sulfate qu'elle dissout en quantité qui varie avec son degré de concentration; elle décompose instantanément le sulfate neutre qu'on y projette et la décomposition ne s'arrête que lorsque la liqueur contient, outre son acide chlorhydrique, 67 grammes par litre d'acide sulfurique libre. L'autre portion de la liqueur paraît d'abord n'exercer sur le sulfate neutre aucune action décomposante et le dissoudre simplement; mais, si l'on continue à ajouter du sel neutre, on le voit bientôt se colorer, et dès lors tout se passe comme dans le cas précédent. Seulement cette fois la solution chlorhydrique a commencé par dissoudre, jusqu'à s'en saturer, le sous-sulfate formé dans les premiers instants de l'expérience, et c'est grâce à sa solubilité dans la liqueur que le précipité orangé a pu demeurer inaperçu quelque temps.

Cette expérience montre bien que l'acide chlorhydrique contenu dans la liqueur n'empêche ni ne favorise la décomposition par l'eau du sulfate neutre de mercure; elle conduit, en outre, à la même valeur limite trouvée plus haut pour la quantité minimum d'acide sulfurique que doit contenir une dissolution aqueuse pour dissoudre le sulfate neutre sans le décomposer.

L'acide nitrique donne lieu à des résultats du même genre; on trouve encore la même quantité d'acide sulfurique dans la liqueur quand la décomposition s'arrête, tandis que la proportion d'acide nitrique n'influe en rien sur le résultat.

L'accord et la constance des valeurs obtenues pour la quantité minimum d'acide sulfurique, dans des cas divers et en présence d'acides différents, sont très-propres à montrer que la décomposition du sous-sulfate, que nous supposons dissous par l'un quelconque des acides employés, si elle est réelle, ne porte que sur de très-faibles quantités de matière. Les différences apportées par cette perturbation, si elle existe, sont, dans les diverses séries d'expériences, inférieures aux écarts apportés dans chacune des séries par les incertitudes d'observation.

En résumé, la proportion d'acide sulfurique libre règle la marche du phénomène. Si la liqueur employée contient moins de 67 grammes de cet acide libre, qu'elle en renferme un autre ou non, elle décompose toujours le sulfate neutre, jusqu'à ce que, s'enrichissant peu à peu en acide sulfurique, elle atteigne cette valeur limite de concentration.

Dès lors la décomposition s'arrête, pour recommencer immédiatement, si, par une cause quelconque, la quantité d'acide sulfurique libre diminue; pour donner lieu au phénomène inverse, la régénération du sel neutre (à l'aide de ses éléments sous-sulfate et acide sulfurique), dès que, pour quelque raison, la quantité d'acide sulfurique libre vient à augmenter dans la liqueur.

### II. — *Nitrate de bismuth*, $BiO^3, 3AzO^5, 3HO$.

A la température ordinaire les cristaux de nitrate de bismuth sont instantanément décomposés par l'eau, qui devient fortement acide; en même temps apparaît un précipité blanc toujours cristallin, aussi bien au moment de sa formation qu'après plusieurs jours de contact avec la liqueur, pourvu que la précipitation ne soit pas due à l'addition de quantités d'eau très-considérables. La structure cristalline est des plus faciles à constater à la loupe, des paillettes chatoyantes brillent dans la liqueur quand on l'agite, et, si on les presse contre les parois du vase avec une baguette de verre, elles manifestent un éclat gras et nacré, qui rappelle celui de l'acide stéarique. Au microscope on voit des prismes d'une transparence parfaite, à six faces, très-aplatis, qui deviennent souvent des tablettes hexagonales absolument régulières, isolées ou accolées les unes aux autres. Dans la lumière polarisée on observe des couleurs très-brillantes. Le précipité renferme des équivalents égaux de bismuth et d'acide azotique avec 1, 2, 3 ou 4 équivalents d'eau, suivant la température à laquelle il a été desséché. A 150 degrés il correspond à la formule

$$BiO^3, AzO^5, HO.$$

Lorsqu'on ajoute à une même liqueur des quantités croissantes de nitrate neutre $BiO^3, 3AzO^5, 3HO$, sa décomposition augmente progressivement la quantité d'acide libre que la dissolution renferme, et l'on arrive à une liqueur qui dissout l'azotate sans le décomposer. En mélangeant directement de l'eau à de l'acide nitrique, on peut arriver à préparer une liqueur ne décomposant plus le nitrate neutre quand on augmente la quantité d'acide qu'elle renferme, mais donnant le préci-

pité blanc cristallin de sous-nitrate dès qu'on lui ajoute de l'eau. Cette liqueur renferme par litre 82 grammes environ d'acide azotique anhydre.

Le sous-nitrate de bismuth se dissout avec facilité dans l'eau chargée d'un acide et en particulier dans l'acide azotique très-étendu. Étudions la solubilité de ce sel dans l'eau chargée à 12 degrés de quantités variables d'acide azotique.

On met en contact, avec la liqueur acide, un excès de sous-nitrate pur et l'on agite souvent le mélange. Au bout de plusieurs jours l'opération est terminée; on dose le bismuth et l'acide azotique (1) dans la liqueur et l'on arrive aux résultats qui suivent, rapportés encore à 1 litre de liqueur.

| $AzO^5$ initial. | $AzO^5$ final. | $BiO^3$ dissous à l'état de sous-nitrate. | Observations. |
|---|---|---|---|
| gr 3,7 | gr 3,9 | gr 0,8 | La liqueur, avant et après sa saturation par le sous-nitrate, décompose instantanément le sel neutre. |
| 9,1 | 10,0 | 4,2 | » |
| 13,0 | 14,6 | 7,0 | » |
| 32,7 | 38,9 | 27,3 | » |
| 42,0 | 50,3 | 40,5 | » |
| 76,0 | 99,4 | 102,4 | » |
| 82,0 | 108,1 | 114,2 | La liqueur, saturée ou non de sous-sel, ne décompose pas le sel neutre. |
| 84,1 | 110,9 | 118,5 | » |

Il est à peine besoin de remarquer que le poids d'oxyde de bismuth, comparé à celui d'acide azotique introduit, satisfait à la formule $BiO^3, AzO^5$. On aurait pu ne doser dans la liqueur que l'un des éléments, on en aurait déduit l'autre.

En prenant pour abscisses les poids d'acide initial et pour ordonnées les poids d'oxyde dissous, nous avons une courbe figurative de la solubilité, parfaitement régulière, qui s'élève rapidement en tournant sa concavité vers les ordonnées positives, tant qu'on ne dépasse pas l'abscisse correspondant à 82 grammes d'acide initial. Les nombres de la dernière expérience exigeraient que la courbure changeât brusque-

(1) Pour doser l'acide nitrique, on fait digérer pendant plusieurs heures la liqueur avec du carbonate de baryte artificiel; tout l'acide devient nitrate de baryte; on ajoute à la liqueur filtrée de l'acide sulfurique, et le poids de sulfate de baryte recueilli permet de conclure celui de l'acide nitrique correspondant. Le bismuth est dosé à l'état d'oxyde $BiO^3$.

ment de sens et que la convexité se dirigeât vers les Y positives à partir de l'abscisse 82.

Semblablement à ce que nous avons fait pour le sulfate de mercure, nous chercherons à représenter la composition de la liqueur en prenant d'abord 82 grammes d'acide libre, puis 114 d'oxyde, qui, unis à 26,1 d'acide, formeront du sous-nitrate dissous par les 82 d'acide libre; il restera $4^{gr},5$ d'oxyde, qui, avec 3 grammes d'acide, sont bien dans les proportions voulues pour constituer du sel neutre.

Il est aisé de voir que de cette manière, quand on aura dépassé 82 grammes d'acide libre, l'excès d'acide étant employé à reconstituer du sel neutre en se combinant à du sous-nitrate, la liqueur s'enrichira moins en oxyde que s'il y avait simple dissolution du sous-sel; car, pour une augmentation de 5 grammes d'acide, nous avons, au voisinage de l'abscisse 82, un gain de 12 grammes d'oxyde environ, tandis que la recomposition du sel neutre n'introduit, pour 5 grammes d'acide, que 10 grammes d'oxyde de bismuth dans la liqueur.

Dans le but de vérifier qu'en effet la liqueur qui renferme par litre plus de 82 grammes d'acide, mise en présence d'un excès de sous-sel, reconstitue du sel neutre qui entre en dissolution, nous avons varié les conditions des expériences et dosé dans tous les cas les quantités A et B d'acide et d'oxyde total lorsque toute réaction a cessé. Si l'on retranche à A 82 grammes d'acide libre et 26,1 qu'il dissout à l'état de sous-nitrate, à B 114,2 d'oxyde combiné aux $26^{gr},1$ d'acide nitrique dans le sous-sel, les restes A — 82 — 26,1 et B — 114,2 devront se trouver dans le rapport indiqué par la constitution du sel neutre. On peut aussi retrancher 114,2 à B, calculer la quantité d'acide nitrique qui, en se combinant au reste, formerait du sel neutre, et la somme de cette quantité et de 26,1, retranchée de A, doit donner pour reste 82. Voici les résultats obtenus :

| | $AzO^5$ total. | $BiO^3$ total. | $AzO^5$ libre. |
|---|---|---|---|
| | gr | gr | gr |
| Eau et nitrate neutre en excès..... | 113,1 | 121,5 | 82,0 |
| Après addition d'acide nitrique..... | 120,6 | 132,0 | 82,5 |
| Après addition d'eau et de sel neutre.... | 180,1 | 220,4 | 83,1 |
| Après addition de sous-nitrate..... | 180,7 | 220,6 | 83,4 |
| Eau, acide nitrique, sous-sel en excès.... | 188,2 | 234,0 | 82,1 |
| Après addition d'eau..... | 140,3 | 190,7 | 83,1 |
| Après addition de sous-nitrate..... | 140,0 | 191,0 | 82,6 |
| Après addition d'eau..... | 132,0 | 177,7 | 83,5 |
| Après addition de sel neutre..... | 147,9 | 202,7 | 82,7 |

On voit que les nombres de la troisième colonne sont sensiblement les mêmes et que la proportion d'acide libre reste invariable dans des liqueurs de composition bien différente.

Ainsi, quand on fait agir à 10 degrés de l'eau pure ou faiblement chargée d'acide nitrique sur du nitrate neutre de bismuth, celui-ci se décompose, de l'acide nitrique devient libre et il se forme du sous-nitrate cristallisé qui se dissout jusqu'à saturer la liqueur. Quand la proportion d'acide libre atteint 82 grammes par litre environ, la décomposition cesse et le nitrate neutre se dissout simplement. Si l'on ajoute alors de l'eau ou de l'acide nitrique, la composition de la liqueur se modifie jusqu'à ce qu'elle renferme la quantité limite d'acide libre, en cédant au sous-nitrate si elle en contenait tout d'abord davantage, décomposant le sel neutre dissous si elle en renfermait moins. C'est donc ici encore l'acide nitrique libre qui régit la formation ou la destruction du sel neutre, et si les autres éléments (nitrate neutre et sous-nitrate) que la liqueur renferme ont une influence quelconque, elle est de l'ordre des erreurs d'expérience et échappe par suite à l'observation.

Enfin, lorsqu'à une dissolution acide de nitrate neutre de bismuth on ajoute de l'eau en quantités de plus en plus grandes, du sous-nitrate se précipite et la liqueur revient toujours à son degré de concentration limite tant qu'il reste du sulfate neutre en dissolution; mais, la quantité d'eau allant en augmentant sans cesse, ce sel disparaît entièrement, la quantité d'acide libre, désormais inférieure à 82 grammes, diminue, et l'on ne retrouve plus dans la solution que du sous-nitrate dissous, dans la proportion indiquée par la courbe de solubilité de ce sel. Voici quelques résultats obtenus dans ces circonstances; ces nombres se placent rigoureusement sur la courbe de solubilité :

| | $AzO^5$ total. | $BiO^3$ total. | $AzO^5$ libre. |
|---|---|---|---|
| | gr | gr | gr |
| Eau et nitrate neutre | 24,3 | 14,2 | 21,1 |
| Après addition d'eau | 19,3 | 10,1 | 17,0 |
| » | 14,5 | 7,0 | 12,9 |
| » | 11,8 | 5,3 | 10,6 |
| » | 5,4 | 1,8 | 5,1 |
| Après addition d'acide nitrique | 24,5 | 13,0 | 21,5 |
| » | 31,9 | 21,2 | 27,1 |
| » | 38,9 | 27,4 | 32,7 |

Dans ces expériences, où nous sommes constamment au-dessous de la limite 82, les additions d'acide nitrique n'ont d'autre effet que de modifier la solubilité du sous-sel. Le sous-nitrate, qui se dépose quand on ajoute de l'eau à une liqueur déjà étendue (ce qui diminue notablement sa solubilité), est souvent en tables hexagonales très-larges. Il répond, du reste, toujours à la composition $BiO^3, AzO^5$.

Quand on chauffe une dissolution acide de nitrate neutre, on voit encore apparaître le précipité cristallisé de sous-sel, et celui-ci se redissout après le refroidissement au bout d'un temps plus ou moins long. C'est que la quantité minimum d'acide nitrique libre qu'une liqueur doit renfermer pour ne pas décomposer le nitrate neutre augmente quand la température s'élève. Le sel neutre se dédouble alors, abandonnant à la liqueur l'acide nitrique qui lui manque pour atteindre le degré de concentration limite qui correspond à la température considérée. Comme le refroidissement ramène les conditions primitives, cet acide, désormais en excès, s'unit au sous-nitrate qui résultait de sa mise en liberté lors de l'élévation de la température, et le précipité, se dissolvant peu à peu, disparaît de la liqueur.

### III. — *Sous-nitrate de bismuth,* $BiO^3, AzO^5, HO$.

Le précipité blanc cristallin de sous-nitrate de bismuth que l'on obtient dans les circonstances précédentes peut, lui aussi, subir l'influence décomposante de l'eau. Quand on le met au contact d'une grande quantité d'eau froide, 100 fois son poids par exemple, il perd rapidement son éclat et sa forme cristalline pour affecter l'apparence d'une poudre amorphe. En même temps la liqueur devient laiteuse, elle traverse les filtres en cet état, et ce n'est qu'après avoir traversé plusieurs filtres superposés qu'elle devient limpide. L'acidité de cette liqueur indique que le sous-nitrate s'est dédoublé en acide nitrique et en un nouveau sel plus basique que le premier.

D'une manière générale, les caractères de cette décomposition sont ceux que nous avons observés avec le nitrate neutre, et la liqueur, mise en contact avec un excès de sous-nitrate, contient : 1° de l'acide nitrique libre, dont la quantité représente la limite inférieure de concentration, pour laquelle la décomposition du sous-nitrate n'a plus

lieu; 2° du sous-nitrate $BiO^3, AzO^5, HO$ dissous dans cet acide libre; 3° une certaine quantité du nouveau sel formé, également en dissolution. Seulement, ici, comme on doit opérer en présence de liqueurs très-étendues, la détermination de la limite, fort différente de celle qui correspond à l'azotate neutre, ne peut plus s'effectuer à la température ordinaire. Les valeurs qui représentent les deux limites correspondant à l'azotate neutre et au sous-azotate diffèrent tellement entre elles à une même température, que, tandis que la décomposition du sel neutre serait très-difficile à étudier à 100 degrés, celle du sous-nitrate ne devient facile à mesurer qu'à cette température. Par suite, le deuxième phénomène ne peut en aucune façon être regardé comme une cause de perturbation du premier.

Tout se passe, d'ailleurs, avec l'eau bouillante comme avec l'eau froide : le sous-nitrate cède peu à peu son acide à l'eau bouillante, et quand celle-ci, successivement renouvelée, cesse de s'en charger, le sel est réduit en une poudre blanche insipide qui, même au microscope, ne semble pas cristalline, et dont la composition est exprimée par la formule $2BiO^3, AzO^5$.

La liqueur, qui a bouilli avec un excès du sous-nitrate $BiO^3, AzO^5, HO$, renferme par litre 4 grammes environ d'acide libre, et, dans une telle liqueur, le sous-sel $2BiO^3, AzO^5$ est à peine soluble. Comme il ne renferme que le dixième de son poids d'acide nitrique, on peut, sans erreur sensible, ne pas en tenir compte et admettre que la quantité totale d'acide nitrique que l'on trouve dans la dissolution comprend : 1° l'acide libre; 2° celui qui est à l'état de $BiO^3, AzO^5, HO$. On a ainsi, par litre et à 100 degrés :

| $AzO^5$ total. | $BiO^3$. | $AzO^5$ libre. |
|---|---|---|
| gr | gr | gr |
| 4,4 | 1,0 | 4,17 |
| 4,4 | 1,2 | 4,12 |
| 4,6 | 1,1 | 4,35 |

La liqueur qui, à 100 degrés, cesse de décomposer le sous-nitrate $BiO^3, AzO^5$, contient donc 4 grammes environ d'acide libre par litre. Elle dissout $1^{gr},3$ de ce sous-nitrate et une très-faible quantité du composé $2BiO^3, AzO^5$.

Quand on fait bouillir le sous-sel cristallisé avec de l'eau renfermant

4 grammes d'acide par litre ou une quantité un peu supérieure, la liqueur reste parfaitement limpide et le sel garde son éclat; mais si, en ajoutant de l'eau, on abaisse l'acide libre au-dessous de cette limite, la liqueur devient immédiatement opaline, passe trouble à travers les filtres, et les paillettes perdent leur éclat et leur forme cristalline. En remplaçant la liqueur par de l'eau pure, celle-ci s'acidifie de moins en moins, jusqu'à ce que, après plusieurs renouvellements successifs, elle reste neutre, et le précipité, qui présente alors la composition $2BiO^3, AzO^5$, paraît n'éprouver de la part de l'eau bouillante aucune action appréciable.

Si l'on verse au contraire, dans la liqueur trouble, quelques gouttes d'acide nitrique, dès que sa concentration dépasse la limite de 4 grammes par litre elle s'éclaircit; l'acide en excès se combine avec une portion du sous-sel $2BiO^3, AzO^5$, et celui-ci, redevenant du $BiO^3, AzO^5$, reprend son éclat argentin et sa forme cristalline. Il se dissout intégralement dans la liqueur lorsqu'on y ajoute des quantités d'acide un peu considérables.

Il est dès lors facile de se rendre compte des différences de composition que présentent les sous-nitrates de bismuth du commerce. Quand on précipite le nitrate neutre par l'eau, on obtient d'abord le nitrate basique $BiO^3, AzO^5, HO$ cristallisé, qui, par des lavages à l'eau froide ou chaude, se décompose en partie et perd son éclat. La poudre blanche qui reste contient alors du sous-nitrate $2BiO^3, AzO^5$ mêlé de $BiO^3, AzO^5$ plus ou moins altéré. De là les proportions variables d'acide et de base que l'on trouve dans ces mélanges. Les sous-nitrates du commerce cèdent toujours de l'acide nitrique à l'eau, et ce n'est qu'après épuisement complet par ce liquide qu'ils présentent la composition, désormais invariable, qui répond à la formule $2BiO^3, AzO^5$.

## IV. — *Protochlorure d'antimoine*, $Sb^2Cl^3$.

Le protochlorure d'antimoine, mis au contact de l'eau, donne, comme les sels précédents, une liqueur fortement acide, en même temps qu'un précipité blanc cristallin d'oxychlorure d'antimoine $Sb^2O^2Cl$ se produit. A mesure qu'on ajoute à la dissolution des cris-

taux de protochlorure, elle s'enrichit en acide chlorhydrique libre, grâce à la décomposition de ce sel, et l'on arrive finalement à avoir un liquide qui dissout le chlorure sans le décomposer. On peut, d'ailleurs, préparer par tâtonnements un mélange d'eau et d'acide chlorhydrique n'ayant aucune action chimique sur le chlorure d'antimoine, quand on augmente la quantité d'acide qu'elle renferme, mais le décomposant en donnant le précipité blanc dès qu'on lui ajoute de l'eau (1). Cette liqueur renferme par litre environ 159 grammes d'acide chlorhydrique anhydre.

En étudiant la solubilité de l'oxychlorure d'antimoine dans l'eau chargée de quantités plus ou moins fortes d'acide chlorhydrique à la température de 15 degrés, on trouve les résultats qui suivent :

| HCl initial. | HCl final. | Sb dissous à l'état de $Sb^2O^2Cl$. | Observations. |
|---|---|---|---|
| gr 54,5 | gr 54,7 | gr 1,65 | La liqueur décompose le protochlorure avant d'être saturée d'oxychlorure, comme après. |
| 69,4 | 70,2 | 5,3 | » |
| 115,6 | 119,9 | 29,2 | » |
| 121,4 | 126,9 | 36,3 | » |
| 158,98 | 169,7 | 74,9 | La liqueur ne décompose plus le protochlorure. |
| 162,7 | 222,6 | 187,4 | » |

On voit que le poids d'antimoine dissous, comparé à celui d'acide chlorhydrique introduit en même temps que lui dans la liqueur, correspond bien à la formule $Sb^2O^2Cl$.

Or, prenant pour abscisses les poids d'acide initial et pour ordonnées les poids d'antimoine dissous à l'état d'oxychlorure, on obtient une courbe parfaitement régulière tant qu'on ne dépasse pas l'abscisse correspondant à 159 d'acide initial ; puis tout à coup l'ordonnée croît brusquement avec une rapidité extrême, comme on le voit dans le dernier nombre du tableau.

Si nous cherchons, cette fois encore, à interpréter le phénomène comme nous l'avons fait avec les sels précédents, et à représenter la composition de la dernière liqueur en y prenant d'abord 159 grammes

(1) *Voir*, sur la décomposition de $Sb^2Cl^3$, un Mémoire de M. Baudrimont, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLII, p. 863.

d'acide libre et 75 d'antimoine, qui, combinés à 10,7 d'acide, formeront de l'oxychlorure dissous par les 159 grammes d'acide libre, il restera 112,5 d'antimoine et 52,9 d'acide chlorhydrique qui sont bien dans les proportions exigées par la formule $Sb^2Cl^3$ du protochlorure d'antimoine.

Il est aisé de voir que, de cette manière, quand on aura dépassé par litre 159 grammes d'acide libre, l'excès d'acide étant employé à se combiner avec de l'oxychlorure pour reconstituer du protochlorure, la liqueur devra s'enrichir plus vite en antimoine que lorsqu'il y avait simplement dissolution de l'oxychlorure; car, au voisinage de l'abscisse 159, à une augmentation de 10 grammes d'acide, correspond un gain de 11 grammes environ d'antimoine, tandis que la formation du protochlorure entraîne, avec 10 grammes d'acide, 24 grammes d'antimoine dans la liqueur.

On peut encore vérifier, comme avec les sels précédents, par des expériences analogues et à l'aide de la même méthode, que toute liqueur contenant par litre plus de 159 grammes d'acide chlorhydrique libre, mise en présence d'oxychlorure en excès, reproduit du protochlorure qui entre en dissolution. On dose dans chaque liqueur l'acide chlorhydrique total A et l'antimoine total B; la quantité d'acide libre nécessaire pour empêcher la décomposition du protochlorure étant 159 grammes par litre et cet acide dissolvant, à l'état d'oxychlorure, 75 grammes d'antimoine unis à 10,7 d'acide, les quantités

$$A - (159 + 10,7)$$

d'acide et $B - 75$ d'antimoine doivent se trouver dans le rapport voulu par la formule $Sb^2Cl^3$. On peut aussi prendre $B - 75$, calculer le poids P d'acide qui, en s'y combinant, donnerait du protochlorure, et alors la quantité $A - (P + 10,7)$ doit donner un reste très-voisin de 159. Voici quelques résultats :

| | HCl total. | Sb total. | HCl libre. |
|---|---|---|---|
| | gr | gr | gr |
| Eau et protochlorure en excès..... | 222,6 | 187,4 | 162,7 |
| Après addition de protochlorure..... | 194,4 | 127,3 | 159,6 |
| Après addition d'eau et d'oxychlorure.... | 184,3 | 114,9 | 154,2 |
| Eau et protochlorure en excès..... | 286,4 | 334,1 | 159,7 |
| Après addition d'eau..... | 224,4 | 197,0 | 158,9 |

Les nombres de la dernière colonne ne présentent entre eux que de faibles différences, de sorte que l'on peut regarder comme constante la proportion d'acide libre que l'on trouve dans des liqueurs de composition bien différente.

Ainsi, à la température de 15 degrés, les dissolutions étendues d'acide chlorhydrique décomposent le protochlorure d'antimoine, de l'acide chlorhydrique devient libre et il se produit de l'oxychlorure, qui se dissout jusqu'à ce que la liqueur en soit saturée. Dès que la proportion d'acide libre atteint 159 grammes par litre environ, la décomposition cesse et le protochlorure se dissout simplement. Si à une liqueur contenant plus de 159 grammes on ajoute de l'eau ou de l'oxychlorure, il se fait une décomposition nouvelle, ou bien une certaine quantité du protochlorure se reproduit dans la liqueur à l'aide de ses éléments (acide libre et oxychlorure) jusqu'à ce que celle-ci arrive à contenir la proportion limite d'acide libre. L'équilibre existe alors de nouveau entre les différents éléments qui se trouvent en présence, et il persistera tant que, la température demeurant constante, la quantité d'acide libre restera invariable. C'est donc ici encore, suivant la proportion d'acide libre, que l'on aura formation ou destruction du protochlorure, et c'est cet acide, par conséquent, qui règlera la marche de la réaction.

### V. — *Oxychlorure d'antimoine*, $Sb^2O^2Cl$.

L'oxychlorure d'antimoine est, lui aussi, décomposé par l'eau. A froid la réaction est très-faible, quoique l'eau devienne manifestement acide, mais elle est plus énergique à 100 degrés. En faisant bouillir de l'oxychlorure avec un excès d'eau et renouvelant celle-ci jusqu'à ce qu'elle n'enlève plus de chlore, on trouve que la matière change complétement d'aspect; elle est alors formée de petits prismes allongés et transparents qui ne rappellent en rien les octaèdres courts d'oxychlorure; on n'a plus alors que de l'acide antimonieux, dont l'analyse conduit rigoureusement à la formule $Sb^2O^3$ et qui possède, en effet, les caractères de cette substance. Ainsi, par exemple, ils se colorent immédiatement en brun foncé au contact du sulfhydrate d'ammoniaque, tan-

dis que, dans ces conditions, l'oxychlorure devient seulement rouge clair.

La décomposition de l'oxychlorure s'effectue comme celle du protochlorure; la liqueur acide est très-étendue et ne contient que des traces d'antimoine en dissolution. La détermination de la quantité limite d'acide chlorhydrique, pour laquelle la décomposition du sel n'a plus lieu, ne peut s'effectuer à la température ordinaire, à cause du peu d'intensité de cette décomposition; mais, en faisant bouillir de l'eau et de l'oxychlorure en excès, on arrive toujours finalement à une liqueur renfermant par litre $3^{gr},5$ environ d'acide chlorhydrique libre, et toute liqueur plus concentrée se comporte vis-à-vis de l'oxychlorure comme un simple dissolvant.

VI.—*Sulfate double de potasse et de chaux*, $2(SO^3, CaO), (SO^3, KO), 3HO$.

Lorsqu'on mélange du sulfate de chaux en poudre à une solution concentrée et froide de sulfate de potasse, il se produit un sulfate double de potasse et de chaux (dont j'indiquerai ailleurs le mode de préparation et les propriétés). C'est un sel bien cristallisé en aiguilles brillantes, qui répond à la formule $2(SO^3, CaO), (SO^3, KO), 3HO$, et qui, en présence de l'eau, se ternit, s'altère, perd peu à peu son sulfate de potasse, et, après un lavage prolongé, se réduit à du sulfate de chaux pur. Pour étudier cette décomposition, nous avons eu recours aux expériences qui suivent :

1° On fait agir sur du sulfate de chaux une solution saturée et en excès de sulfate de potasse; du sulfate double prend naissance et la liqueur renferme à la fois du sulfate de potasse et du sulfate de chaux. Après avoir analysé une portion de cette liqueur, on y ajoute de l'eau. Au bout d'un certain temps, on analyse une partie de la liqueur nouvelle, puis on y ajoute de l'eau et ainsi de suite. Il suffit de doser la chaux et l'acide sulfurique pour connaître dans quelles proportions se trouvent le sulfate de chaux et le sulfate de potasse. A mesure que la liqueur devient plus étendue, le poids du sulfate de potasse contenu dans un volume donné va d'abord en diminuant, puis reste fixe pendant quelque temps et enfin diminue de nouveau indéfiniment. Ainsi,

à 15 degrés, 1 litre de liqueur, qui renfermait d'abord 80 grammes de sulfate de potasse, en perd peu à peu, jusqu'à n'en plus contenir que 25 environ, se maintient longtemps à ce degré de concentration, puis, par des additions d'eau successives, arrive à n'en plus renfermer.

2° Le sulfate double pur est mis en contact avec de l'eau, et, au bout de quelques heures, on analyse une portion de la liqueur, puis on ajoute de l'eau et ainsi de suite. La quantité de sulfate de potasse contenue dans un volume donné de la liqueur reste longtemps constante, malgré des additions d'eau successives, puis finit par diminuer indéfiniment.

3° Dans ces deux séries d'expériences, on trouve que le poids de sulfate de potasse qui reste quelque temps invariable est le même, et si, à ce moment, on ajoute du sulfate de chaux en excès, il ne se combine pas au sulfate de potasse libre et la composition de la liqueur ne change pas.

4° Si, au lieu de sulfate de chaux (supposé déjà en excès), on ajoute du sulfate de potasse, celui-ci se combine avec du sulfate de chaux précédemment libre, et la composition de la liqueur reste encore constante et la même qu'auparavant.

5° Enfin si, dans une liqueur renfermant une quantité quelconque de sulfate de potasse, on introduit un excès de sulfate de chaux, il se forme du sel double quand la solution contient par litre plus de 25 grammes environ de sulfate de potasse; il ne s'en forme pas trace quand elle en renferme moins. Le tableau suivant résume un certain nombre des résultats fournis par ces diverses séries d'expériences :

| | Durée de l'expérience. | $SO^3$, CaO par litre. | $SO^3$, KO par litre. |
|---|---|---|---|
| | h | gr | gr |
| Sulfate de chaux et solution saturée et en excès de $SO^3$, KO | 36 | 1,293 | 36,055 |
| Après addition d'eau | 30 | 1,293 | 24,950 |
| » | 24 | 1,293 | 25,040 |
| » | 24 | 1,293 | 25,037 |
| » | 24 | 1,293 | 24,903 |
| » | 48 | 1,360 | 24,245 |
| » | 48 | 1,360 | 24,061 |
| On remplace toute la liqueur par de l'eau. Les aiguilles brillantes de sel double disparaissent entièrement | 48 | 1,293 | 6,558 |

| | Durée de l'expérience. | $SO^3$, CaO par litre. | $SO^3$, KO par litre. |
|---|---|---|---|
| | h | gr | gr |
| Après nouvelle addition d'eau | 48 | 2,300 | 1,610 |
| Solution de $SO^3$, KO et sulfate de chaux en excès | 10 | 1,310 | 27,690 |
| Après addition de $SO^3$, KO dissous | 48 | 1,360 | 25,926 |
| » | 48 | 1,360 | 24,958 |
| Après addition de $SO^3$, KO pulvérisé | 24 | 1,360 | 25,909 |
| Solution de $SO^3$, KO et $SO^3$, CaO en excès | 120 | 1,360 | 25,888 |
| » | 432 | 1,360 | 24,794 |
| Après addition de $SO^3$, KO en poudre | 192 | 1,360 | 25,786 |
| Solution renfermant par litre 22 grammes de $SO^3$, KO et sulfate de chaux en excès | 648 | 1,360 | 21,993 |
| Sulfate double pur et eau | 48 | 1,360 | 24,860 |
| Après addition d'eau | 42 | 1,394 | 26,030 |
| » | 96 | 1,360 | 26,310 |
| » | 120 | 1,394 | 25,207 |
| On remplace toute la liqueur par de l'eau | 96 | 1,360 | 12,691 |
| Addition d'eau nouvelle | 96 | 1,310 | 2,117 |
| Liqueur (renfermant par litre 26 grammes de $SO^3$KO, et $1^{gr}$,440 de $SO^3$, KO en excès) et sulfate double pur. | 24 | 1,430 | 25,990 |
| Liqueur (renfermant par litre 26 grammes de $SO^3$KO, et $1^{gr}$, 440 de $SO^3$, KO) en excès et sulfate double pur. | 192 | 1,430 | 26,020 |
| Sulfate double pur en excès, et eau renfermant par litre 25 grammes de $SO^3$, KO | 24 | 1,360 | 25,279 |
| Après addition de sulfate de chaux | 192 | 1,360 | 25,613 |
| Sulfate double pur. Excès d'eau renfermant par litre 50 grammes de $SO^3$, KO | 336 | 1,360 | 49,990 |
| Sulfate double pur en excès, et eau renfermant par litre 25 grammes de $SO^3$, KO | 144 | 1,360 | 25,610 |
| Sulfate double pur en excès, et eau renfermant par litre 25 grammes de $SO^3$, KO | 312 | 1,360 | 25,606 |
| Sulfate double pur. Solution saturée de $SO^3$CaO en excès | 48 | 1,360 | 25,235 |
| Sulfate double pur. Solution saturée de $SO^3$CaO en excès | 192 | 1,360 | 25,448 |

On voit donc que, à la température de 15 degrés, à laquelle ces expériences ont été faites, le sulfate double de potasse et de chaux, mis au contact de l'eau pure, se détruit au moins en partie et que la décomposition s'arrête quand la liqueur contient environ 25 grammes de sulfate de potasse par litre. Si l'on étend alors la liqueur, une nouvelle portion du sel se décompose; si l'on ajoute, au contraire, du sulfate de potasse, il se combine au sulfate de chaux libre, et, dans les deux cas,

on finit par trouver dans 1 litre de liqueur 25 grammes de sulfate de potasse. La liqueur n'a plus alors d'autre action sur le sel double que d'en dissoudre une très-faible quantité.

Tout ce que nous venons de dire pour le sulfate de potasse, l'un des éléments du sel double, devrait pouvoir s'appliquer au second, le sulfate de chaux, et cependant l'expérience ne prouve pas qu'il en soit ainsi; on ne trouve pas que le poids de sulfate de chaux, dissous dans un volume déterminé de la liqueur, aille en diminuant d'abord pour atteindre une certaine limite. Il y a lieu de chercher quelle influence peut avoir la présence du sulfate de potasse sur la solubilité du sulfate de chaux et sur celle du sulfate double.

Considérons un mélange d'eau et de sulfate double à la température ordinaire, une faible partie du sel se dissout et une autre se décompose. Ses éléments se séparent, jusqu'à ce que la liqueur contienne par litre, d'une part, 26 grammes environ de sulfate de potasse, de l'autre, une quantité de sulfate de chaux anhydre inférieure ou au plus égale à $2^{gr},360$ (qui représente la quantité de sulfate de chaux $SO^3,CaO$ que 1 litre de chaux peut dissoudre à 15 degrés). Le sulfate de potasse étant le plus soluble des deux sels jouera un rôle prépondérant dans le phénomène; il nous restera, au bout d'un certain temps, du sel double non attaqué et dont une partie (nécessairement très-faible, vu le peu de chaux que renferme la liqueur), est dissoute, une solution de sulfate de potasse en renfermant environ 26 grammes par litre, enfin du sulfate de chaux qui provient du sel décomposé et dont une partie est dissoute, tandis que l'autre demeure insoluble. C'est ici que le sulfate de potasse vient jouer un rôle particulier.

Prenons, en effet, une solution saturée de sulfate de chaux à 15 degrés et ajoutons-y progressivement des cristaux de sulfate de potasse, jusqu'à ce qu'ils cessent de se dissoudre. Si, pour divers états de la liqueur, nous cherchons les poids de sulfate de chaux dissous, nous trouvons par litre :

| $SO^3$, KO. | $SO^3$, CaO. |
|---|---|
| gr | gr |
| 0 | 2,360 |
| 8 | 1,803 |
| 10 | 1,767 |
| 12 | 1,660 |
| 16 | 1,495 |
| 20 | 1,360 |
| 26 | 1,360 |
| 30 | 1,360 |
| 55 | 1,200 |
| 110 | 0,748 |

D'après ce tableau, le poids de sulfate de chaux va en diminuant; il faut donc tout d'abord qu'il s'en précipite, et, en effet, on ne tarde pas à observer un dépôt de cristaux, dont la forme et l'aspect font reconnaître du gypse, ce que vérifie, du reste, leur composition, et l'on en conclut simplement que, en présence du sulfate de potasse, le sulfate de chaux est moins soluble que dans l'eau pure; de plus, la précipitation des cristaux est lente, la liqueur se sursature, et l'addition de quelques cristaux de sulfate de chaux ne suffit pas toujours pour accélérer notablement la marche du phénomène. Quand le poids de sulfate de potasse dissous atteint 26 grammes par litre ou dépasse cette limite, ce n'est plus du gypse, mais bien du sulfate double que l'on voit se former dans le liquide en houppes d'aiguilles fines et brillantes. La quantité totale de chaux que l'on trouve alors dans la liqueur représente non plus seulement du sulfate de chaux, mais la somme des quantités de sulfate de chaux libre et de sulfate double, tous deux dissous dans le liquide. L'expérience montre que cette quantité totale dépend non-seulement de la température, mais aussi de l'excès de sulfate de potasse contenu dans la dissolution. Elle augmente quand la quantité totale de sulfate de potasse dissous diminue.

En définitive, la décomposition du sulfate double de potasse et de chaux, sous l'influence de l'eau à 15 degrés, se fait de telle sorte qu'un litre de la liqueur contienne d'une manière permanente 26 grammes environ de sulfate de potasse et 1,3 de sulfate de chaux; elle est alors sans action chimique sur le sel double. A cette température il faut donc que le liquide qui baigne le sel ait une composition déterminée et constante pour que l'équilibre subsiste. Si l'on ajoute de l'eau, une partie du sel se décompose; si la concentration augmente, une portion du sel

double se reproduit, de manière à rétablir toujours dans la liqueur la composition primitive.

Ainsi, à 15 degrés, il existe une liqueur sans action chimique sur le sulfate double avec lequel on la met en contact. Si maintenant on fait varier la température, on trouve que la composition de cette liqueur limite varie, comme l'indiquent les nombres suivants, rapportés au litre. La durée au bout de laquelle la liqueur atteint sa composition définitive est variable; mais, en général, au bout de deux heures, cette composition ne change plus sensiblement.

| Température. | $SO^3$, CaO. | $SO^3$, KO. |
|---|---|---|
| 0 | gr 1,428 | gr 12,1 |
| 15 | 1,400 | 26,0 |
| 32 | 1,360 | 37,6 |
| 46 | 1,360 | 44,4 |
| 50 | 1,290 | 46,5 |
| 62 | 1,290 | 51,3 |
| 67 | 1,200 | 53,6 |
| 81 | 1,200 | 57,6 |
| 100 | 1,200 | 64,4 |

La quantité de sulfate de potasse nécessaire pour que la décomposition du sel double n'ait plus lieu augmente donc avec la température. Il est à remarquer aussi que le poids de sulfate de potasse dissous reste toujours bien inférieur à celui que peut dissoudre à la même température un litre d'eau. D'après Gay-Lussac et Berzélius, la solubilité du sulfate de potasse croît sensiblement en raison directe de la température, et, en calculant d'après cela les poids de sulfate de potasse correspondant aux températures ci-dessus pour l'eau pure, on aurait, en les comparant aux précédents, les résultats qui suivent :

| | $SO^3$, KO | |
|---|---|---|
| Température. | dans la liqueur. | dans l'eau pure. |
| 0 | gr 12,1 | gr 83,0 |
| 15 | 26,0 | 109,3 |
| 32 | 37,6 | 139,1 |
| 46 | 44,4 | 163,7 |
| 50 | 46,5 | 170,7 |
| 62 | 51,3 | 191,8 |
| 67 | 53,6 | 200,5 |
| 81 | 57,6 | 225,1 |
| 100 | 64,4 | 258,5 |

Quant au sulfate de chaux, sa solubilité dans l'eau pure varie très-peu entre zéro et 100 degrés (1), et, si l'on néglige la faible quantité de sel double dissous, la petite proportion de chaux que la liqueur renferme représente simplement sa solubilité dans des solutions de sulfate de potasse de plus en plus concentrées.

A chaque température correspond donc une valeur limite de concentration de la liqueur, à partir de laquelle la décomposition du sel double n'a plus lieu. Cette limite invariable, quand la température est constante, s'élève et s'abaisse avec elle. Selon qu'une liqueur est au-dessous ou au-dessus du degré de concentration qui correspond à une température déterminée, le sel double se détruit donc ou se reforme, et, dans les deux cas, le phénomène s'arrête, dès que la liqueur atteint la composition limite qui correspond à la température considérée.

La présence dans la liqueur d'un sel étranger, sans action chimique sur le sel double ou sur ses éléments, ne modifie en rien le phénomène, pourvu toutefois que la solution saline qui doit agir sur le sulfate de chaux en ait été préalablement saturée (cette précaution est indispensable, parce que les sels qui se prêtent à l'expérience, nitrates, chlorures, acétates, etc. alcalins augmentent notablement la solubilité du sulfate de chaux). Ainsi, à 15 degrés par exemple, une solution de 20 grammes de chlorure de potassium dans 1 litre d'eau dissout $1^{gr},495$ de $SO^3,CaO$; et, après dix jours de contact avec un excès de sulfate double, elle contient 1,500 de sulfate de chaux et 25,8 de sulfate de potasse. Avec 100 grammes d'azotate de soude dans 1 litre d'eau, on dissout 6,38 de sulfate de chaux, et, après contact prolongé avec un excès de sel double, on trouve dans la liqueur 6,3 de sulfate de chaux et 25,7 de sulfate de potasse. De même, 180 grammes d'acétate de soude dans 1 litre d'eau dissolvent 6,64 de sulfate de chaux, et, après digestion sur le sel double, il y a 6,6 de sulfate de chaux et 25,9 de sulfate de potasse. Enfin, si la dissolution saline saturée de sulfate de chaux a été tout d'abord additionnée de 26 grammes par litre de sulfate de potasse, elle est, comme l'eau pure

(1) Marignac, *Mémoire sur la solubilité du sulfate de chaux* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. I, p. 275).

dans les mêmes circonstances, dépourvue de toute action chimique sur le composé.

En résumé, l'eau décompose tous les sels que nous venons d'étudier, et comme ceux-ci ont des compositions et des propriétés entièrements différentes, les résultats obtenus peuvent s'appliquer à tous les sels destructibles par l'eau; il se forme un produit peu soluble (sous-sel, sulfate de chaux, etc.), et l'eau devient une dissolution acide ou saline.

Pour chaque température il existe une liqueur de composition telle, que, suivant qu'on en fait varier la concentration dans un sens ou dans l'autre, il y a décomposition ou reconstitution du sel considéré; et, quel que soit le point de départ, le sens du phénomène est toujours tel, que la liqueur revienne à cette composition limite.

Le degré limite de concentration paraît indépendant de la quantité de sel non décomposé que la liqueur renferme, de la proportion des éléments non dissous de ce sel qu'elle contient et de la nature des substances acides ou salines qu'elle peut contenir, celles-ci n'ayant, bien entendu, aucune action chimique sur le sel ni sur ses éléments. Si ces substances ont quelque influence sur le phénomène, le nombre qui la mesure est du même ordre de grandeur que les erreurs d'expérience, et la sensibilité de la méthode d'observation n'est pas suffisante pour permettre d'évaluer ou même de constater cette influence.

Il ne sera pas sans intérêt de rapprocher ces résultats généraux des lois de la dissociation, telles que M. Henri Sainte-Claire Deville les a établies, et qui, sauf quelques différences de mots, paraissent s'appliquer à ces décompositions par l'eau. On ne sera pas surpris de cette analogie, si l'on se rappelle les résultats que l'on constate en comparant entre elles l'action de la chaleur et celle d'un dissolvant sur un même composé; si l'on réfléchit, par exemple, à ce fait, que la quantité de chaleur nécessaire pour produire un changement d'état est toujours la même, que ce changement d'état ait lieu par voie ignée ou par voie de dissolution, il paraîtra tout naturel que certaines décompositions puissent s'opérer par l'action directe du feu ou par l'intermédiaire d'un liquide, en suivant, dans les deux cas, des règles analogues. J'insisterai, du reste, sur ce sujet dans la seconde partie de ces

recherches, en examinant encore la décomposition de certains sels doubles. Il me restera aussi à montrer comment la connaissance précise des circonstances dans lesquelles les sels se décomposent sous l'influence d'un dissolvant permet d'en déduire les conditions dans lesquelles il faut se placer pour obtenir, parfaitement définis et cristallisés au sein de l'eau, des sels que ce liquide décompose avec une facilité extrême, et qui, par cette raison même, sont peu ou mal connus aujourd'hui.

# RENDEMENT
# DES MACHINES THERMIQUES,

PAR M. J. BOURGET,

DIRECTEUR DE L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE DE SAINTE-BARBE.

(Mémoire présenté à l'Institut le 6 mai 1872.)

D'après les idées nouvelles que la Théorie mécanique de la chaleur a introduites dans l'étude des machines à feu, on doit considérer le calorique comme le véritable moteur et le foyer comme le récepteur. On pourrait donc mesurer leur *rendement* en comparant le travail utile au poids de combustible brûlé. Toutefois, comme la puissance calorifique est variable pour les divers combustibles, comme les foyers utilisent des quantités diverses de combustible pour le chauffage, comme le travail absorbé par les résistances passives varie pour les diverses machines et pour une même machine suivant son état, cette mesure du rendement manquerait de précision. Nous prendrons une autre définition.

On sait aujourd'hui que le calorique et le travail mécanique sont des choses homogènes pouvant se remplacer l'une l'autre par équivalents à raison de 430 kilogrammètres environ par calorie [1]. Mais, quand on se sert de la chaleur pour produire du travail à l'aide d'un corps intermédiaire, on ne transforme jamais qu'une portion de celle

[1] Cette proposition a été démontrée par les nombreuses expériences de Joule, Hirn, etc.; elle a été démontrée aussi analytiquement par nous-même en 1857, dans un Mémoire sur les machines à air chaud, présenté à l'Institut, et plus tard dans un Mémoire qui fait partie des *Annales de Chimie et de Physique* (1859). Cette démonstration a été insérée par M. Regnault dans le tome XXXVII des *Mémoires de l'Institut*, page 559.

qu'on emprunte au foyer, et nous pouvons appeler *rendement théorique* (¹) le rapport qui existe entre la chaleur *transformée* en travail et la chaleur *empruntée* à la source, au foyer. Nous distinguons le rendement théorique du *rendement effectif :* ce dernier serait le rapport qui existe entre le travail utile de la machine et le travail total que la machine devrait faire en vertu de son rendement théorique.

Il n'est pas évident, *a priori*, que l'on ne puisse pas transformer complétement en travail une quantité donnée de chaleur et qu'il y ait un *rendement théorique* maximum qu'on ne pourra jamais dépasser; cependant ce principe paraît aujourd'hui certain.

Si l'on admet, avec Clausius, qu'*il est impossible de faire passer de la chaleur d'un corps plus froid dans un corps plus chaud sans une dépense de travail*, on peut démontrer rigoureusement que, si une machine thermique quelconque opère entre deux températures extrêmes, $t_1$ et $t_2$, le rendement théorique ne peut dépasser la fraction

$$\rho = 1 - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$$

ou

$$\rho = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

en nommant $T_1$ et $T_2$ les *températures absolues*, c'est-à-dire les températures comptées à partir de $-273^\circ = -\frac{1}{\alpha}$.

Mais nous avouons que le principe de Clausius ne nous paraît pas avoir le degré d'évidence qui convient à un axiome. Nous avons donc cherché à démontrer le théorème du *rendement théorique*, indépendamment de ce principe métaphysique. La démonstration suivante, relative aux machines à gaz permanents, est complète et ne repose que sur les lois expérimentales connues. Si l'on joint cette démonstration à celle que nous avons donnée (*Annales de Chimie et de Physique*, 1859) du principe de l'équivalence, on a un premier chapitre de la Thermodynamique, aussi rationnel que l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique.

---

(¹) On appelle habituellement *coefficient économique* ce que nous nommons ici *rendement théorique*.

Notre analyse s'étend aussi aux machines dites à *récurrence* ou à *régénérateurs*, dans lesquelles une partie de la chaleur cédée aux réfrigérants est utilisée pour échauffer le gaz moteur du cycle suivant. Ces machines sont soumises à la loi du rendement théorique maximum; c'est une proposition qui n'est pas démontrée dans les Traités publiés jusqu'à présent sur les machines à feu.

## *Analyse.*

1. Désignons par $p$ et $v$ la pression et le volume d'une masse gazeuse. Considérons ces deux éléments, qui définissent l'état de cette masse, comme l'ordonnée et l'abscisse d'un point. Une courbe fermée quelconque représentera un cycle d'états successifs, au bout desquels le gaz sera revenu à son état primitif. Nous avons démontré le théorème suivant [1] :

*Si une masse gazeuse parcourt un cycle fermé quelconque d'états, dans le sens des aiguilles d'une montre, il y a anéantissement d'une quantité de chaleur proportionnelle à l'aire du circuit, qui représente le travail extérieur produit par le gaz, dans ses variations de pression et de volume.*

*En sens inverse, il y aurait anéantissement de travail extérieur et création proportionnelle de chaleur.*

Une machine à gaz est un organe qui prend à un certain état $(p_0 v_0)$ une masse gazeuse de poids $(D_0)$, et qui la fait passer par une série d'états formant un cycle fermé, variable suivant la machine.

Cela posé, nous pouvons démontrer les théorèmes relatifs au rendement théorique, qui font l'objet de ce Mémoire.

2. Théorème I. — *Si une machine à gaz fonctionne suivant le cycle de Carnot, son rendement théorique sera*

$$\rho = 1 - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

---

[1] *Voir* les *Annales de Chimie et de Physique* (1859), ou le tome XXXVII des *Mémoires de l'Institut*, page 559.

*$t_1$ et $t_2$ étant les températures extrêmes entre lesquelles le gaz se meut,* $T_1$, $T_2$ *désignant les températures absolues.*

Nous appelons *cycle de Carnot* celui qui est formé par deux courbes *isothermiques* ($pV =$ const.) et deux courbes *adiabatiques* ($pV^\gamma =$ const., $\gamma = \frac{c}{c'} = 1,41$). Nous désignerons par la lettre Q, affectée d'indices divers, les quantités de chaleur empruntées au foyer et par la lettre R, affectée d'indices divers, les quantités de chaleur reçues par les réfrigérants.

Soient (*fig.* 1)

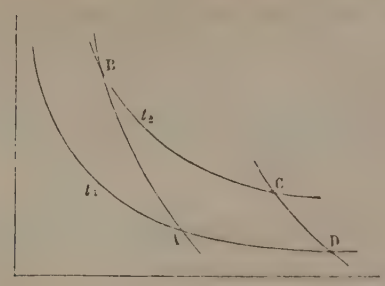
ABCD le cycle de Carnot considéré;
AD et BC les courbes isothermiques $t_1$ et $t_2$;
AB et CD les courbes adiabatiques.

Désignons par

| | | |
|---|---|---|
| $(v_1 p_1)$ | l'état du gaz en | A; |
| $(v_2 p_2)$ | » | B; |
| $(V_2 P_2)$ | » | C; |
| $(V_1 P_1)$ | » | D. |

Faisons parcourir à la masse $D_0$ le cycle ABCD.

Fig. 1.




1° Suivant AB, courbe adiabatique, la dépense est nulle.

2° Suivant BC, courbe isothermique, la chaleur empruntée au foyer est

$$Q = \frac{H}{E}(1 + \alpha t_2) \mathcal{L} \frac{V_2}{v_2} \quad \text{ou} \quad Q = AH(1 + \alpha t_2) \mathcal{L} \frac{V_2}{v_2}$$

(*voir* notre Mémoire *Sur les machines à air chaud,* formule (40). Gauthier-Villars, 1871; ou notre Mémoire des *Annales de Chimie et de Physique*, 1859). Dans cette formule, E désigne l'équivalent mécanique de la chaleur, A son inverse, H le nombre 10333 kilogrammètres, $\mathcal{L}$ un logarithme népérien.

3° Suivant CD, courbe adiabatique, la dépense est nulle.

4° Suivant DA, courbe isothermique, la chaleur recueillie ou déposée dans le réfrigérant est

$$R = AH(1 + \alpha t_1)\,\mathcal{L}\frac{V_1}{v_1}.$$

La chaleur transformée est donc Q — R, tandis que la chaleur empruntée au foyer est Q; donc le *rendement théorique* de la machine est

$$\frac{Q - R}{Q} = 1 - \frac{R}{Q} = 1 - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}\,\frac{\mathcal{L}\frac{V_1}{v_1}}{\mathcal{L}\frac{V_2}{v_2}};$$

mais, par hypothèse,

$$p_1 v_1 = P_1 V_1, \quad p_2 v_2 = P_2 V_2,$$
$$p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma, \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma;$$

de là on conclut sans peine

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2};$$

donc le rendement théorique de la machine, dans laquelle l'air suit le cycle de Carnot, est bien

$$\rho = 1 - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

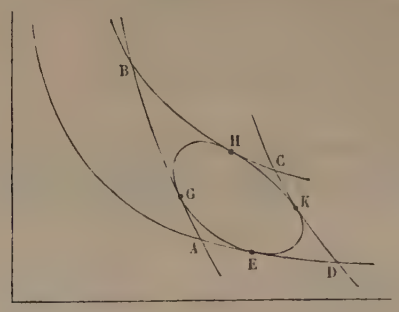
C. Q. F. D.

Ce qu'il y a de remarquable dans le cycle de Carnot, c'est que le gaz n'est jamais mis en contact avec des corps d'une température différente. Il n'y a jamais chute brusque de température. La chaleur n'est jamais donnée ou ôtée au gaz pour changer sa température; elle est tout entière employée à faire varier son volume, à effectuer un travail extérieur.

3. Théorème II. — *Si une machine fonctionne suivant un cycle quelconque autre que celui de Carnot, le rendement théorique est moindre que* $\rho$.

En effet, soit un cycle quelconque (*fig.* 2) autre que celui de Carnot EGHK. Nous pouvons toujours l'enfermer complétement dans un cycle

Fig. 2.




de Carnot par deux courbes isothermiques et deux courbes adiabatiques tangentes. Il pourrait arriver, sans que la démonstration fût un défaut, qu'une partie du cycle donné se confondît avec une partie du cycle de Carnot ABCD.

Nous désignerons par

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \sigma_4$$

les aires

$$\text{EKD}, \quad \text{EAG}, \quad \text{GBH}, \quad \text{ECK},$$

et nous appellerons

| | | |
|---|---|---|
| $R_1$ la chaleur recueillie suivant | | DE; |
| $R_2$ | » | EA; |
| $\rho_1$ | » | KE; |
| $\rho_2$ | » | EG; |
| $Q_1$ la chaleur dépensée suivant | | BH; |
| $Q_2$ | » | HC; |
| $\chi_1$ | » | GH; |
| $\chi_2$ | » | HK. |

D'après le théorème de l'équivalent déjà rappelé (1), nous avons les

relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\rho_1 - R_1 &= A\sigma_1, \quad \text{d'où} \quad \rho_1 = R_1 + A\sigma_1;\\
\rho_2 - R_2 &= A\sigma_2, \qquad\qquad \rho_2 = R_2 + A\sigma_2;\\
Q_1 - \chi_1 &= A\sigma_3, \qquad\qquad \chi_1 = Q_1 - A\sigma_3;\\
Q_2 - \chi_2 &= A\sigma_4, \qquad\qquad \chi_2 = Q_2 - A\sigma_4;
\end{aligned}$$

par suite, le *rendement théorique* sera

$$R = \frac{\chi_1 + \chi_2 - \rho_1 - \rho_2}{\chi_1 + \chi_2} = 1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\chi_1 + \chi_2} = 1 - \frac{R_1 + R_2 + A\sigma_1 + A\sigma_2}{Q_1 + Q_2 - A\sigma_3 - A\sigma_4},$$

d'où l'on voit que ce rendement sera moindre que

$$\rho = 1 - \frac{R_1 + R_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T^2}.$$

C. Q. F. D.

Notre démonstration a l'avantage de montrer que la différence entre R et $\rho$ est liée à la différence qui existe entre l'aire du cycle de Carnot et l'aire du cycle qui y est contenu. Elle fait voir que plus $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$ s'approchent de zéro, plus le rendement théorique de la machine se rapproche de $\rho$, tout en lui restant inférieur.

Dans notre Mémoire *Sur les machines à air chaud*, nous avons donné, du même théorème, une démonstration moins complète et moins claire en enfermant le circuit donné dans un cycle autre que celui de Carnot.

### *Machines à récurrence.*

4. On appelle *régénérateurs de chaleur* des organes destinés à recevoir momentanément dans le parcours d'un cycle une certaine quantité de la chaleur possédée par le gaz au moment où il va sortir de la machine. Cette chaleur est mise en réserve pour réchauffer le gaz nouveau qui doit parcourir le cycle suivant. Les machines munies de régénérateurs sont dites *à récurrence*. On peut imaginer, par exemple, dans la machine d'Ericsson, que l'air sortant traverse une série de tubes métalliques, tandis que l'air entrant pénètre en sens contraire et en circulant autour des surfaces extérieures de ces tubes. Ces dispositions

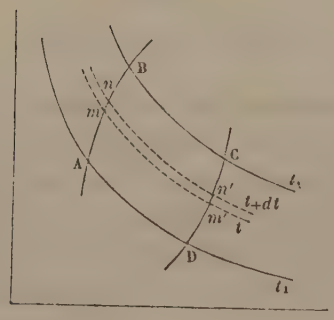
ingénieuses et d'autres qui ont été imaginées par Ericsson, Burdin, etc., donnent à une machine un rendement supérieur à celui qu'elle aurait si l'on perdait inutilement tout le calorique que l'air emporte en s'échappant dans l'atmosphère.

Une condition indispensable que le régénérateur doit remplir, c'est que la température de la portion qui est en contact avec l'air rentrant soit supérieure à celle de cet air, car un corps ne s'échauffe qu'au contact d'un corps plus chaud. Il ne suffit donc pas de mettre en réserve une certaine quantité de chaleur pour qu'elle soit utilisable, il faut encore qu'elle soit à une température suffisante. C'est pourquoi la chaleur déposée dans le réfrigérant par l'air qui suit un cycle de Carnot est complétement perdue pour le travail de la machine dans le cycle suivant.

Sans nous préoccuper des moyens pratiques les meilleurs pour disposer les régénérateurs dans les machines à gaz, nous allons chercher à étendre aux machines à récurrence les théorèmes relatifs au rendement théorique. Nous supposerons ces machines en mouvement depuis un temps indéfini, afin de négliger la perte qui résulte du calorique abandonné au régénérateur dans le premier cycle.

5. *Courbes conjuguées.* — Pour comprendre parfaitement ce qui va suivre, il faut avoir présent à l'esprit le principe que nous allons développer. Entre deux courbes isothermiques quelconques, $t_1$ et $t_2$ (*fig.* 3),

Fig. 3.




imaginons une courbe quelconque AB, assujettie à cette seule condition, qu'une courbe isothermique intermédiaire $mm'$ ne puisse la cou-

per qu'en un point $m$. Traçons maintenant une seconde courbe pareille CD et nommons *points correspondants* ceux qui sont, comme $m, m'$, sur une même courbe isothermique. Désignons par $p, v$ les coordonnées de $m$ et par $p', v'$ les coordonnées de $m'$. Si l'on a

$$v' = kv, \quad p' = \frac{p}{k}$$

pour deux points correspondants quelconques, la courbe CD est appelée la conjuguée de AB. D'après cela, si

$$F(v, p) = 0$$

est l'équation de AB ou d'une portion de AB, l'équation de CD ou de la portion correspondante de CD sera

$$F\left(\frac{v'}{k}, kp'\right) = 0.$$

La ligne AB peut être formée de plusieurs branches de courbes successives n'ayant pas la même équation; la conjuguée sera formée d'autant de branches successives correspondantes, mais $k$ sera toujours la même constante.

*Deux courbes conjuguées n'ont aucun point commun;* car au point commun on devrait avoir

$$v' = kv = v, \quad \text{par suite} \quad k = 1.$$

Deux courbes conjuguées jouissent de cette propriété que *la chaleur dépensée pour parcourir deux éléments correspondants compris entre deux courbes isothermiques infiniment voisines $t$ et $t + dt$ est la même.* En effet, pour passer de $m$ en $n$, la dépense de chaleur est

$$c'\,dt + Apdv$$

et, pour passer de $m'$ en $n'$, elle est

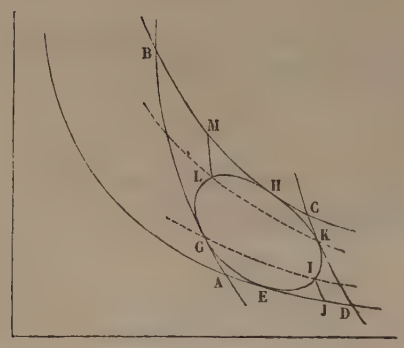
$$c'\,dt + Ap'dv' = c'\,dt + Apdv.$$

De là résulte que, si ces deux éléments $mn$, $m'n'$ sont parcourus, pendant deux cycles successifs, en sens inverse l'un de l'autre, la chaleur recueillie dans le parcours de $n'm'$ pourra être mise en réserve et servir

au passage du gaz de $m$ en $n$, car ces deux chaleurs sont égales en quantité et en température.

6. Considérons maintenant un cycle quelconque EGHK (*fig.* 4); insérons-le dans un cycle de Carnot ABCD. Par les points G et K menons

Fig. 4.




des courbes isothermiques GI, KL. Nous avons vu que la source calorifique doit fournir de la chaleur le long de la branche GHK et que les réfrigérants recueillent de la chaleur le long de la branche KEG. Mais, si les portions du cycle GL et KI sont des portions *conjuguées*, la chaleur recueillie le long de KI pourra servir, élément par élément, à faire passer le gaz par les états successifs de GL. Donc, dans le cours d'un cycle, lorsque le régime de la machine sera établi, le foyer ne fournira de la chaleur que le long de LHK, et la seule chaleur réellement perdue sera celle qu'on recueille le long de IEG.

Il est clair que la machine a un rendement théorique supérieur à celui de la même machine sans récurrence; mais il n'est pas évident qu'il soit encore inférieur à celui d'une machine de Carnot. Nous allons démontrer qu'il en est ainsi dans tous les cas.

7. Théorème III. — *Dans une machine quelconque à récurrence, le rendement théorique est inférieur à celui d'une machine suivant le cycle de Carnot.*

Par les deux points L et I imaginons des portions de courbes adiabatiques LM, IJ. Nous remarquerons que les lignes complexes AGLM,

CKIJ sont *conjuguées;* cela résulte de ce que deux courbes adiabatiques sont toujours conjuguées, puisque ce sont des courbes à dépense nulle de chaleur et que, par hypothèse, GL, IK sont deux branches conjuguées. Cela posé, nommons

$$\sigma'_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma'_3, \quad \sigma_4$$

les aires

$$\text{IJE}, \quad \text{EAG}, \quad \text{LHM}, \quad \text{HCK},$$

et

| | | |
|---|---|---|
| $R'_1$ | la chaleur recueillie le long de | JE, |
| $R_2$ | » | EA, |
| $\rho'_1$ | » | IE, |
| $\rho_2$ | » | EG, |
| $Q'_1$ | la chaleur dépensée le long de | MH, |
| $Q_2$ | » | HC, |
| $\chi'_1$ | » | LH, |
| $\chi_2$ | » | HK, |

et conservons d'ailleurs toutes les notations du théorème II. Nous aurons

$$\begin{aligned}
\rho'_1 - R'_1 &= A\sigma'_1, \quad \text{donc} \quad & \rho'_1 &= R'_1 + A\sigma'_1,\\
\rho_2 - R_2 &= A\sigma_2, & \rho_2 &= R_2 + A\sigma_2,\\
Q'_1 - \chi'_1 &= A\sigma'_2, & \chi'_1 &= Q'_1 - A\sigma'_3,\\
Q_2 - \chi_2 &= A\sigma_4, & \chi_2 &= Q_2 - A\sigma_4.
\end{aligned}$$

Le rendement de la machine à récurrence sera donc

$$\mathfrak{R} = \frac{\chi'_1 + \chi_2 - \rho'_1 - \rho_2}{\chi'_1 + \chi_2} = 1 - \frac{\rho'_1 + \rho_2}{\chi'_1 + \chi_2} = 1 - \frac{R'_1 + R_2 + A\sigma'_1 + A\sigma_2}{Q'_1 + Q_2 - A\sigma'_3 - A\sigma_4},$$

par suite

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{R'_1 + R_2}{Q'_1 + Q_2}$$

ou bien

$$\mathfrak{R} < 1 - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} \frac{\mathcal{L}\frac{V_1}{v_1}}{\frac{V_2}{v_2}},$$

en désignant par

$$(p_1 v_1), \quad (P_1 V_1), \quad (p_2 v_2), \quad (P_2 V_2)$$

les états aux points

$$A, \quad J, \quad M, \quad C;$$

mais, en vertu des lignes conjuguées MLGA, CKIJ, on a

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2},$$

donc enfin

$$\mathfrak{R} < \rho.$$

C. Q. F. D.

Ainsi, qu'une machine à gaz fonctionne avec ou sans régénérateurs, le *rendement théorique* ne peut jamais dépasser celui du cycle de Carnot. C'est là une proposition fort importante au point de vue des applications industrielles.

# ÉTUDES SUR LE MAGNÉTISME

(DEUXIÈME PARTIE).

## ÉTUDE DE L'AIMANTATION DE L'ACIER PAR LES COURANTS,

PAR M. E. BOUTY,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

### INTRODUCTION.

Un aimant peut être considéré comme la réunion d'un très-grand nombre d'aimants élémentaires, différant entre eux par la direction de leur axe et la grandeur de leur moment magnétique. La distribution effective de ces *éléments magnétiques*, dont nous devons la notion à l'expérience de l'aimant brisé, demeure inaccessible à l'expérience, tout au moins autant qu'on respecte l'intégrité de l'aimant étudié; mais, dans la plupart des cas, on impose d'avance au problème de l'étude des aimants des restrictions qui le simplifient beaucoup.

En premier lieu, on démontre que l'on peut substituer à l'aimantation vraie [1] une distribution superficielle fictive de magnétisme austral et boréal, qui la remplace au point de vue de toutes les actions exercées par l'aimant extérieurement à sa masse. C'est la distribution du magnétisme étudiée d'ordinaire depuis Coulomb, et sa connaissance suffit tant que l'aimant n'est point divisé.

En second lieu, si l'on considère le cas pratique d'un barreau aimanté régulièrement, agissant à grande distance, on remarque que la

[1] *Voir* dans le *Journal de Physique*, t. II, p. 297, mon article *Sur les distributions fictives d'électricité et de magnétisme*, etc.

distribution magnétique du barreau se réduit à deux plages de quantité égale et de signe contraire occupant les deux extrémités. On peut supposer chacune de ces masses condensée en son centre de gravité, et le barreau se trouve remplacé par deux pôles magnétiques de masses $m$ et $-m$, distants l'un de l'autre d'une quantité $\lambda$ ([1]).

Enfin, au point de vue des actions exercées à l'infini, un aimant ne diffère d'un autre que par un seul élément, que l'on désigne sous le nom de *moment magnétique*, et dont la mesure rationnelle, dans le cas d'un barreau régulier, est le produit $m\lambda$ de la *quantité de magnétisme* de chaque pôle par leur distance. Tel est le terme de cette analyse.

Les méthodes auxquelles on a recours pour l'étude expérimentale des aimants sont de deux sortes : les unes, utilisant l'action au contact ou à très-petite distance, sont employées pour déterminer la distribution magnétique ; leur emploi est long et pénible et leur application sujette à des difficultés théoriques spéciales. Les autres, fondées sur l'action à très-grande distance, fournissent d'une manière aussi simple qu'exacte la mesure du moment magnétique.

Je me propose, dans ce travail, d'appliquer ces dernières méthodes à l'étude de la distribution. Biot a déjà donné l'exemple de ce genre de recherches, en reliant par une formule mathématique, rattachée plus tard par Green à la théorie de la force coercitive ([2]), les lois de la distribution dans une série de barreaux cylindriques saturés, aux moments magnétiques de ces barreaux. La partie de mon travail qui se rapporte aux barres grosses n'est qu'un développement plus large de la méthode de Biot. La partie relative aux aiguilles longues et minces est plus ori-

---

([1]) Physiquement on peut, avec M. Jamin, considérer un barreau comme un faisceau d'aimants infiniment minces ayant leurs pôles à leurs extrémités. Ce faisceau, embrassé par la section moyenne du barreau comme par une bague, épanouit des deux côtés ses pôles de nom contraire, qui forment la distribution superficielle. Cette synthèse revient à remplacer la distribution inconnue des éléments magnétiques par la distribution solénoïdale équivalente (*voir* les Mémoires de Thomson), et est parfaitement légitime au point de vue mathématique ; elle a l'avantage de parler à l'imagination, et de donner un sens physique précis à toutes les quantités que l'on rencontre dans l'étude analytique des aimants. Ainsi, la puissance $m$ du pôle d'un barreau mesure le nombre de files magnétiques qu'il comprend, et la distance $\lambda$ est la longueur moyenne des files, comptée dans le sens de l'axe : on peut l'appeler *longueur réduite* ou *longueur magnétique* du barreau.

([2]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. III, p. 34.

ginale : elle a pour but de déterminer, indépendamment de toute hypothèse, les deux facteurs $m$ et $\lambda$ du moment magnétique.

Admettons que l'on possède une série d'aiguilles aimantées, dans lesquelles la quantité de magnétisme $m$ est la même, ainsi que la distance $\frac{d}{2}$ d'un pôle à l'extrémité voisine. Ce cas se présentera, par exemple, pour les aiguilles extraites par voie de rupture du milieu d'une même aiguille fortement trempée (1), et nous verrons par la suite qu'il est assez général. Soit alors $y$ le moment magnétique d'une aiguille de longueur $x$, on a

$$y = m(x - d), \tag{1}$$

et il suffit théoriquement de deux mesures, faites sur des aiguilles de longueur différente, pour déterminer les deux quantités $m$ et $d$.

C'est, je crois, la première fois qu'on publie des déterminations relatives à la situation des pôles dans les aiguilles aimantées par les courants. Quant aux quantités de magnétisme, leur étude a fait l'objet des recherches d'un grand nombre de savants, et j'ai cité ailleurs (2) les principales et les plus récentes. Les méthodes employées sont d'une application très-délicate et supposent que l'on possède des masses homogènes considérables du métal magnétique étudié, condition bien difficile à réaliser. De plus, ces masses doivent recevoir la forme d'ellipsoïdes (3) ou de tores (4), pour que l'aimantation qu'elles reçoivent soit la même en tous leurs points; alors le quotient de leur moment magnétique par leur volume fournit la quantité de magnétisme $\mu$ rapportée à l'unité de volume.

Je n'ai effectué que des mesures relatives de $\mu$; mais les physiciens

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. III, p. 36 et 43.

(2) *Ibid.*, p. 10.

(3) Poisson (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII) démontre que, dans un ellipsoïde soumis à l'action d'une force magnétique constante, agissant dans le sens de son grand axe, l'aimantation est identique en tous les points de la masse, et égale à la valeur qu'elle possède au centre d'une aiguille cylindrique infiniment longue, soumise à la même force. De Quintus Icilius a employé des ellipsoïdes.

(4) Stoletow et Rowland ont employé des tores; l'aimantation est la même en tous les points par raison de symétrie; mais un solénoïde fermé étant sans action sur un point quelconque extérieur, ces savants ont dû avoir recours, pour effectuer leurs mesures, à la production de courants induits accompagnant l'aimantation ou la désaimantation de l'anneau métallique étudié.

qui ont étudié la question ont trouvé ses valeurs si variables d'un acier ou d'un fer doux à un autre, et pour un même échantillon, dans des circonstances physiques en apparence si voisines, qu'il y a peu d'intérêt à réaliser des mesures absolues, tant que les lois qui président à cette variabilité ne nous sont pas entièrement connues.

La plus grande partie de ces recherches a été effectuée au lycée de Reims. Elles ont été terminées au laboratoire de M. Jamin. Qu'il me soit permis d'adresser ici mes remercîments à ce savant maître pour la bienveillance avec laquelle il m'a accueilli et pour les conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer.

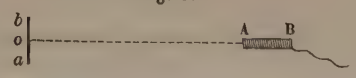
## Article I. — *Aimantation permanente des aiguilles minces trempées dur.*

La quantité de magnétisme acquise d'une manière temporaire ou permanente par une aiguille d'acier soumise à l'action d'un courant, ainsi que la situation des pôles de l'aiguille, dépend de l'intensité de la *force magnétisante* employée. Il importe avant tout de définir celle-ci d'une manière précise.

Pour produire l'aimantation, on place l'aiguille dans l'axe d'une spirale très-longue par rapport à l'aiguille et suffisamment large. Dans ces conditions, l'action exercée par le courant est la même en tous les points de l'aiguille et proportionnelle à l'intensité du courant et à un coefficient qui dépend du nombre et de la largeur des spires ; mais, si l'on veut s'astreindre à employer toujours la même spirale et se borner à des mesures relatives, on peut prendre la mesure de l'intensité du courant pour celle de l'action exercée sur l'aiguille, c'est-à-dire de la force magnétisante.

La mesure relative de l'intensité des courants a été opérée à l'aide d'une sorte de boussole des tangentes d'une construction très-simple. Une petite spirale AB (*fig.* 1), animée par le courant, est disposée de

Fig. 1.




telle sorte que son axe, sensiblement perpendiculaire au méridien magnétique, passe par le milieu *o* d'une petite aiguille aimantée *ab*, mu-

nie d'un miroir et suspendue à un fil de cocon. La tangente de la déviation produite est proportionnelle à l'intensité du courant [1]. Il faut avoir bien soin, pour éliminer toute action étrangère à la spirale, de replier les deux électrodes qui y portent le courant l'une sur l'autre et de très-près, de manière que leur action sur un point extérieur soit très-sensiblement nulle. Un commutateur permet de renverser le courant dans la spirale et d'éliminer ainsi, par une deuxième mesure de la déviation opérée en sens inverse, l'erreur résultant de l'imperfection de l'ajustement.

Quant aux mesures de moments magnétiques, elles étaient ordinairement effectuées par la méthode que j'ai décrite précédemment pour le cas de très-petites aiguilles aimantées [2].

J'ai étudié, en premier lieu, l'aimantation permanente d'aiguilles minces trempées très-dur. Ces aiguilles ont une longueur au moins égale et généralement supérieure à cinquante fois leur diamètre. On vérifie aisément que les moments $y$, acquis d'une manière permanente par ces aiguilles soumises à la même force magnétisante, sont représentés par la formule

$$y = m(x - d), \tag{1}$$

et, par suite, la méthode indiquée dans l'introduction est applicable à une telle série d'aiguilles [3]. Il suffirait donc de mesurer les valeurs

---

[1] Supposons l'aiguille $ab$ et la spirale AB infiniment petites par rapport à la distance $Oo = r$. On peut remplacer la spirale par un aimant dont le moment M est approximativement égal au produit $Si$ de la somme S des surfaces embrassées par chaque spire isolément, par l'intensité du courant. Soit maintenant $\alpha$ la déviation de l'aiguille $ab$, $\mu$ son moment magnétique, on a, d'après Gauss,

$$\tang\alpha = \frac{2M\mu}{Tr^3} = \frac{2S\mu}{Tr^3}\, i.$$

Si les longueurs de $ab$ et de AB ne sont plus négligeables par rapport à $r$, le coefficient de $i$ est beaucoup plus compliqué, mais $\tang\alpha$ demeure proportionnel à $i$.

[2] Voir *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 12. Cette méthode, absolument irréprochable dans le cas de très-petites aiguilles, devient parfois un peu défectueuse, quand on veut mesurer le moment d'aiguilles très-longues, et très-faiblement aimantées. Cela tient à ce qu'il n'est plus permis dans ce cas de supposer nulle l'influence réciproque du barreau directeur et de l'aiguille; mais on est prévenu de cette cause d'erreur, quand elle se présente, par la non-concordance des mesures (1) et (3), et l'on rejette les déterminations correspondantes.

[3] L'équation (1) représente une droite à la condition d'y considérer $x$ et $y$ comme des

correspondantes de $x$ et de $y$ pour un grand nombre d'aiguilles de même diamètre et de longueur différente, et de faire concourir toutes les observations à la détermination de $m$ et de $d$.

Mais cette méthode présente ici un inconvénient : il est, en effet, très-difficile de communiquer à un grand nombre d'aiguilles une trempe dure véritablement identique, et, si cette condition n'est pas réalisée, l'une des deux déterminations, celle de $d$, devient à peu près illusoire; mais on peut déterminer $m$ et $d$ au moyen d'une seule aiguille, en se fondant sur un résultat d'expérience que j'ai déjà indiqué ailleurs ([1]). Quand on brise une aiguille aimantée régulière, trempée dur, les divers fragments retirés de sa partie moyenne, et de longueur suffisante, ont des moments magnétiques représentés par

$$y' = m(x' - \delta). \tag{2}$$

La quantité $\delta$ de cette dernière équation est indépendante de l'intensité de l'aimantation, et, quant à la quantité $m$, il est presque évident, *a priori*, qu'elle est la même que dans l'aiguille mère. On le démontre d'ailleurs expérimentalement en remarquant que les équations (1) et (2), où l'on considère $y$ et $x$ comme des coordonnées courantes, représentent deux droites. Il suffit de tracer celles-ci par un nombre suffisant d'observations, et l'on vérifie qu'elles sont parallèles, c'est-à-dire que les deux quantités $m$ sont égales.

Cela posé, déterminons la longueur et le moment magnétique $x$ et $y$ d'une aiguille, puis réduisons-la par l'ablation des deux bouts sur une longueur convenable, et déterminons de nouveau le moment magnétique $y'$ et la longueur $x'$ correspondante. La distance $\frac{\delta}{2}$ du pôle d'une aiguille de rupture à son extrémité est connue d'avance, et égale, par exemple, à $2^{m},75$ pour une aiguille de $0^{mm},55$ de diamètre. Les équations (1) et (2) déterminent donc complétement $m$ et $d$, au moyen d'une seule aiguille. Ajoutons qu'on peut, par des ruptures successives, raccourcir encore le fragment primitif, et obtenir autant de points que l'on voudra pour mieux déterminer la droite (2), c'est-à-dire la valeur

---

coordonnées courantes. La manière la plus simple de vérifier que cette formule est applicable consiste à vérifier que les points figuratifs des diverses aiguilles tombent effectivement en ligne droite.

([1]) Voir *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 43.

de $m$. La quantité de magnétisme se trouvera connue ainsi avec une très-grande exactitude ([1]).

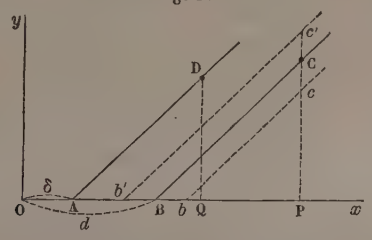
La détermination de $d$ est à coup sûr moins précise, puisqu'elle repose sur une seule observation, celle qui se rapporte à l'aiguille-mère, et que, d'ailleurs, $d$ est toujours une quantité assez petite. Cependant, en multipliant les observations et prenant des moyennes, on arrive à des résultats satisfaisants.

*Quantités de magnétisme.* — Les résultats suivants se rapportent à des aiguilles de $0^{mm},553$ de diamètre; les nombres des deux colonnes sont exprimés en unités arbitraires :

| Intensité du courant. | Quantité de magnétisme. |
|---|---|
| 3 | à peine sensible. |
| 5 | 0,12 |
| 7 | 0,51 |
| 9 | 1,09 |
| 12 | 2,11 |
| 13,8 | 2,89 |
| 15 | 3,35 |
| 18 | 5,65 |
| 23 | 11,96 |
| 28 | 17,90 |
| 36 | 23,00 |
| 40 | 24,00 |
| 50 | 25,90 |
| ∞ | 28,90 |

([1]) Soient BC et AD les droites représentées par les équations (1) et (2). Le problème de la détermination de $d$ revient géométriquement au suivant : par un point C donné, mener

Fig. 2.




une parallèle CB à une droite AB donnée. La droite AD est parfaitement connue; quant au point C, sa position sur l'ordonnée CP comporte en plus ou en moins une erreur C$c$, d'où résulte pour D une erreur négative ou positive égale à B$b$.

Pour mieux représenter la marche de la fonction $m$, on peut construire une courbe en prenant pour abscisses les intensités et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $m$. D'abord concave vers les ordonnées positives, la courbe présente ensuite un point d'inflexion correspondant à l'abscisse 22 à peu près et s'approche asymptotiquement d'une parallèle à l'axe des abscisses.

Ces caractères sont les mêmes que ceux des courbes, qui représentent, d'après Rowland et Stoletow, la fonction magnétisante du fer ou de l'acier (1). Ce sont partout les mêmes traits généraux, et l'analogie est surtout frappante si l'on dessine, en regard de la courbe précédente, celle que Rowland a trouvée pour l'acier de Bessemer (2).

Il convient cependant d'examiner s'il y a, pour l'acier trempé, une véritable fonction magnétisante, c'est-à-dire si le quotient de la quantité $m$ par le carré du diamètre conserve, pour une même valeur de l'intensité du courant, une valeur constante. La difficulté de cette constatation réside dans l'inégalité de la trempe que l'on communique à des aiguilles de différent diamètre, que l'on place dans les mêmes conditions extérieures, par exemple en les immergeant dans l'eau quand elles présentent le même rouge vif (3).

---

(1) C'est la quantité de magnétisme $\mu$ rapportée à l'unité de volume, et considérée comme fonction de l'intensité de la force magnétisante.

(2) Voici le tableau qui a servi à tracer cette courbe. Il est tiré du Mémoire original publié, en août 1873, dans le *Philosophical Magazine;* les nombres des deux colonnes sont exprimés en unités absolues :

| Intensités. | Quantités. | Intensités. | Quantités. |
|---|---|---|---|
| 0,1356 | 18 | 2,756 | 26880 |
| 0,2793 | 80 | 3,219 | 34200 |
| 0,5287 | 255 | 3,551 | 40320 |
| 0,9398 | 727 | 4,469 | 52940 |
| 1,421 | 2526 | 5,698 | 61920 |
| 1,880 | 5108 | 11,44 | 91530 |
| 1,947 | 6482 | 20,69 | 96940 |
| 2,300 | 13510 | 38,99 | 100770 |

(3) Dans ce cas, ce sont les aiguilles les plus grosses qui sont le plus fortement trempées; elles se rapprochent, plus lentement que les aiguilles minces, du maximum de magnétisme dont elles sont susceptibles. Cependant ce maximum vérifie la loi des diamètres, ainsi que je l'ai démontré (voir *Annales de l'École Normale,* 2e série, t. III, p. 40).

D'un autre côté, si l'on rapproche les phénomènes de la trempe de l'acier de ceux de la trempe du verre, on est porté à attribuer à l'acier trempé un certain degré d'hétérogénéité de la surface au centre, et, si elle existait réellement, il n'y aurait plus lieu de parler de fonction magnétisante de l'acier trempé. J'essayai donc, sur l'avis de M. Jamin, de dissoudre dans un acide (1) la couche superficielle d'aiguilles trempées, de manière à les ramener à de moindres diamètres, et d'aimanter ensuite les aiguilles ainsi obtenues. Je constatai ainsi, non sans quelque surprise, l'existence d'une fonction magnétisante parfaitement déterminée; l'acier trempé de mes aiguilles minces est donc très-sensiblement homogène (2), et l'expérience en question permet de préciser ce qu'il convient d'entendre par l'expression un peu vague de *trempe identique*, quand on l'applique à des aiguilles de diamètre différent.

Le tableau suivant est destiné à établir, dans le cas actuel, l'existence d'une fonction magnétisante; il se rapporte au magnétisme acquis d'une manière permanente par des aiguilles amincies à l'acide et de diamètre primitif égal à $1^{mm},178$ :

**Diamètre primitif : $1^{mm},178$.**

| COURANT. | DIAMÈTRE. | | | | MOYENNE. |
|---|---|---|---|---|---|
| | $1^{mm},088$ | $0^{mm},948$ | $0^{mm},854$ | $0^{mm},762$ | |
| 19,55 | 0,1800 | 0,1722 | 0,1202 | ..... | 0,1631 |
| 27,91 | 0,3709 | 0,3764 | 0,3350 | 0,3783 | 0,3663 |
| 36,25 | 0,6298 | 0,6424 | 0,6078 | 0,6821 | 0,6424 |
| 45,50 | 0,8697 | 0,8863 | 0,9078 | 0,8712 | 0,8881 |

Pour éviter les erreurs qui peuvent résulter d'une évaluation inexacte du diamètre (3), on a inscrit dans ce tableau, en regard de chaque va-

(1) L'acide chlorhydrique bouillant ou l'eau régale.

(2) La couche la plus extérieure, sur une épaisseur de $0^{mm},05$ au plus, jouit peut-être de propriétés différentes; mais cette question exige de nouvelles expériences.

(3) Les aiguilles rongées présentent des trous microscopiques, de petites solutions de continuité; leur diamètre évalué au sphéromètre se trouve donc un peu trop fort.

leur de l'intensité du courant, la fraction de la quantité de magnétisme limite atteinte par chaque groupe d'aiguilles. Ces nombres doivent être égaux dans une même ligne horizontale, s'il existe réellement une fonction magnétisante.

Voici d'ailleurs les valeurs des quotients $\mu = \frac{M}{D^2}$ :

| D | $\frac{M}{D^2}$ |
|---|---|
| mm | mm |
| 1,088 | 0,1346 |
| 0,948 | 0,1291 |
| 0,854 | 0,1095 |
| 0,762 | 0,1125 |
| Moyenne..... | 0,1214 |

Le léger décroissement de $\mu$ doit être attribué à une évaluation un peu trop forte des deux derniers diamètres, ainsi que cela a été expliqué en note.

Les résultats relatifs à la fonction magnétisante de l'acier trempé ont été confirmés par l'étude de barres de 7 à 10 millimètres de diamètre primitif.

*Distance des pôles aux extrémités.* — Le tableau suivant fournit la double distance d'un pôle à l'extrémité la plus voisine, pour des aiguilles de $0^{mm},553$ de diamètre :

| COURANT. | *d* observé. | *d* calculé. | DIFFÉRENCE. |
|---|---|---|---|
| | mm | mm | |
| 18,09 | 12,37 | 12,37 | 0,00 |
| 24,99 | 11,86 | 11,32 | + 0,54 |
| 30,31 | 10,12 | 10,52 | — 0,40 |
| 39,32 | 8,86 | 9,16 | — 0,30 |
| 47,04 | 7,32 | 7,99 | — 0,67 |
| 55,07 | 7,19 | 6,78 | + 0,59 |
| ∞ | 5,50 | .... | .... |
| | | Moyenne..... | — 0,73 |

On voit que les pôles se rapprochent des extrémités à mesure que l'in-

tensité du courant qui produit l'aimantation augmente. Les nombres de la troisième colonne ont été calculés par la formule

$$d = 15,1\left(1 - \frac{x}{100}\right),$$

et l'on voit qu'ils représentent très-bien l'expérience, eu égard aux erreurs dont la mesure de $d$ est susceptible. Cependant, au voisinage de la saturation, le décroissement de $d$ est plus lent que ne l'indiquerait la formule, et les valeurs de $d$ s'approchent asymptotiquement de $5^{mm},5$, qui est caractéristique pour les aiguilles saturées de ce diamètre.

Quand le diamètre des aiguilles change, on sait que la limite de $d$ est proportionnelle au diamètre [1]; la formule générale relative à la distance des pôles est donc

$$d = 2aD(1 - px), \tag{3}$$

où $a$ et $p$ sont deux constantes. La constante $a$ dépend du degré de trempe, ainsi qu'on le verra par la suite. Ici cette valeur est $a = 13,65$; elle représente en millimètres la limite vers laquelle tend la distance $\frac{d}{2}$ pour une aiguille de 1 millimètre de diamètre, quand la force qui produit l'aimantation tend vers zéro. La valeur du coefficient $p$ dépend de l'unité au moyen de laquelle on exprime la force magnétisante.

La limite de $d$, pour $x = \infty$, est

$$\delta = 2\alpha D, \tag{4}$$

et la valeur absolue de $\alpha$ est $4^{mm},973$ [2].

En résumé, et sous la restriction que toutes les aiguilles employées sont issues, par voie d'érosion, des mêmes aiguilles mères, il y a une

---

[1] Voir *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 40.

[2] Les expériences faites sur de grosses barres par les méthodes qui seront indiquées plus loin ont fourni des résultats concordant avec ceux-ci. Ainsi des barreaux de 10 millimètres de diamètre trempés au rouge ont donné, pour $a$, la valeur $13^{mm},75$, presque identique avec la précédente. Toutefois la valeur de $\alpha$ est demeurée égale à 8, sans doute parce qu'on n'a pu atteindre la saturation, malgré l'emploi du courant de 25 bons éléments Bunsen.

fonction magnétisante $\varphi(x)$, et le moment magnétique d'une aiguille de longueur $l$ et de diamètre D est représenté par la formule

$$(5) \qquad y = \frac{\varpi D^2}{4} \varphi(x)[l - 2\alpha D(1 - px)]$$

jusqu'à des valeurs de $y$ très-voisines de la limite Y correspondant à la saturation. Cette limite elle-même est donnée par la formule

$$(6) \qquad Y = \frac{\varpi D^2}{4} L(l - 2\alpha D),$$

L étant la valeur limite de la fonction magnétisante pour $x = \infty$.

*Répétition du passage à la spirale.* — J'ai indiqué, dans la première Partie de ce travail [1], que, quand on répète le passage d'une aiguille dans la spirale magnétisante, son moment magnétique augmente, de manière à être représenté par la formule

$$(7) \qquad y = A - \frac{B}{n},$$

où A et B sont des constantes dépendant de l'intensité de la force magnétisante, et où $n$ indique le nombre des passages. Il était intéressant de chercher si l'augmentation du moment magnétique considérée provenait d'un simple changement dans la distribution du magnétisme, c'est-à-dire d'un déplacement des pôles vers les extrémités, ou s'il y avait là une véritable augmentation de la quantité de magnétisme permanent conservée par l'aiguille.

La méthode employée ci-dessus m'a permis de résoudre cette question d'une manière satisfaisante. J'ai trouvé que la quantité de magnétisme et la situation des pôles changent à la fois dans ces circonstances, mais cette dernière d'une manière très-peu sensible. La formule (7) s'applique très-bien aux quantités de magnétisme considérées isolément.

Si l'on fait croître l'intensité de la force magnétisante $x$ à partir de

---

[1] Voir *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 22.

zéro, le rapport $\frac{A}{A-B}$ de la quantité de magnétisme pour $\infty$ passages à la quantité correspondant au premier passage décroît et tend vers l'unité [1]; mais ce qu'il y a de remarquable, c'est que, si l'on cherche, au moyen de la courbe qui représente la fonction magnétisante pour les aiguilles considérées, quelle devrait être l'intensité $x'$ de la force magnétique pour produire la quantité de magnétisme A après un seul passage, on trouve pour le rapport $\frac{x'}{x}$ une valeur sensiblement constante.

Le tableau suivant se rapporte à des aiguilles de $0^{mm},553$ de diamètre :

| COURANT $x$. | A — B | A | $\frac{A}{A-B}$ | $\frac{x'}{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1,00 | 1,28 | 1,280 | 1,080 | |
| 14 | 2,80 | 3,49 | 1,246 | 1,075 | |
| 18 | 5,80 | 6,76 | 1,165 | 1,058 | 1,063 |
| 22 | 10,60 | 12,19 | 1,150 | 1,055 | |
| 26 | 15,70 | 17,50 | 1,115 | 1,061 | |
| 30 | 19,70 | 21,37 | 1,085 | 1,077 | |
| 34 | 22,20 | 23,49 | 1,058 | 1,112 | |
| 38 | 23,60 | 24,45 | 1,036 | 1,102 | |
| 42 | 24,50 | 25,11 | 1,025 | 1,075 | |
| | | | Moyenne..... | 1,077 | |

[1] Dans un travail récent (*Annales de Poggendorff*, Ergängzungsband VII), M. Fromme a exprimé des doutes sur ce résultat. D'après lui, le nombre d'*impulsions* qu'exige une aiguille pour acquérir tout le magnétisme que peut lui communiquer une force donnée croîtrait avec l'intensité de cette force, et la saturation ne pourrait être obtenue que par une infinité d'impulsions.

Ce résultat, au moins bizarre, a été obtenu par l'emploi de forces magnétisantes très-peu considérables agissant sur des ellipsoïdes. Il me paraît que dans ces conditions une foule de causes perturbatrices doivent agir. Je m'abstiendrai cependant d'émettre une opinion quelconque à cet égard, n'ayant moi-même employé que l'action de courants intenses. Mais si M. Fromme veut bien se donner la peine d'aimanter une simple aiguille trempée dur dans une forte spirale animée par 10 éléments Bunsen, il n'aura pas de peine à se convaincre que, dans ce cas, la saturation est atteinte du premier coup, ainsi que le savent tous les physiciens.

On a détaché par une accolade les valeurs du rapport $\frac{x'}{x}$, que l'on considère comme le mieux déterminées, parce qu'elles se rapportent à la région de l'*aimantation rapide,* dont nous parlerons par la suite. La moyenne correspondante diffère peu de la moyenne générale, eu égard aux causes multiples d'erreurs qui doivent s'accumuler dans le calcul de $\frac{x'}{x}$.

On a d'ailleurs observé que la valeur de ce rapport varie très-peu avec le diamètre des aiguilles, que nous supposons toujours inférieur à 1 millimètre. Sa valeur moyenne paraît comprise entre 1,060 et 1,065.

En ce qui concerne le déplacement des pôles, il était naturel de supposer qu'il correspond exactement à l'accroissement de la quantité de magnétisme, c'est-à-dire que l'aimantation finale est en tous points identique à celle que produirait directement la force magnétique $x'$. L'expérience a vérifié cette prévision d'une manière satisfaisante, eu égard à la petitesse des déplacements à mesurer. Voici des nombres relatifs aux aiguilles de $0^{mm},553$ de diamètre :

| COURANT $x$. | $d$ (1er passage.) | $d$ (5e passage). | DIFFÉRENCE observée. | DIFFÉRENCE calculée. |
|---|---|---|---|---|
| | mm | mm | | |
| 33,29 | 10,073 | 9,730 | + 0,343 | + 0,309 |
| 47,88 | 7,869 | 7,570 | + 0,299 | + 0,444 |

## Article II. — *Aimantation temporaire des aiguilles minces trempées dur.*

Pour étudier l'aimantation temporaire des aiguilles, on place la spirale magnétisante dans une rainure perpendiculaire au méridien magnétique, et dont le prolongement rencontre le milieu de l'aiguille galvanométrique qui nous a déjà servi dans l'article précédent. La déviation produite par la spirale seule est proportionnelle à l'intensité du

courant, ainsi qu'on l'a déjà expliqué [1]. Quand on a introduit une aiguille dans la spirale, la déviation augmente d'une quantité qui peut servir de mesure au moment magnétique temporaire de l'aiguille, mais seulement sous certaines conditions que nous allons préciser.

La déviation produite par l'aiguille de moment temporaire M est donnée par la formule de Gauss

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{2M\mu}{Tr^3},$$

à la condition que la longueur de l'aiguille soit négligeable par rapport à la distance $r$ de son centre à l'aiguille galvanométrique. S'il en est autrement, la formule de Gauss doit être complétée en multipliant le second membre par un facteur dont le premier terme est l'unité, et les termes successifs de l'ordre des puissances 2, 4, 6,..., de $\frac{l}{r}$. Les valeurs de $\operatorname{tang}\alpha$ demeurent proportionnelles à M pour une même aiguille ou des aiguilles de même longueur, mais cessent de l'être pour des aiguilles de longueurs différentes dont les centres coïncident.

De là la nécessité de placer la spirale très-loin de l'aiguille galvanométrique, et, par suite, l'obligation de se contenter de déviations médiocres ou très-faibles pour évaluer les moments. J'ai récemment obvié à cet inconvénient en rendant l'aiguille galvanométrique presque astatique à l'aide d'un barreau compensateur placé au-dessus de l'aiguille dans une situation invariable.

On a de fortes raisons d'admettre, *a priori*, que la distance des pôles temporaires des aiguilles à leur extrémité est indépendante de l'intensité du courant. En effet, les aiguilles se trouvent soumises, pendant l'aimantation temporaire, à une force magnétique qui a la même valeur en tous leurs points, c'est-à-dire à une force analogue à la force coercitive introduite par Green dans ses calculs sur les aiguilles satu-

---

[1] Si l'on veut rendre les expériences actuelles comparables à celles de l'article précédent, il faut déterminer le rapport des déviations $\alpha$ et $\alpha'$ qu'un même courant, traversant la spirale galvanométrique de l'article précédent et la grande spirale magnétisante, imprime à l'aiguille, et multiplier les nouvelles mesures d'intensité par le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$.

rées [1]; la distribution du magnétisme et la situation des pôles doivent être les mêmes dans les deux cas. La même observation était applicable aux aiguilles de rupture [2], pour lesquelles nous avons vérifié directement que les pôles occupent une situation invariable [3].

Nous accepterons provisoirement cette conclusion que j'ai vérifiée de la manière la plus complète dans le cas des barres. Ainsi la détermination des moments temporaires équivaut à celle des quantités de magnétisme, quand la distance $\frac{d'}{2}$ d'un pôle temporaire à l'extrémité voisine est connue par les expériences sur les aiguilles saturées. Il a paru commode, pour éliminer le plus possible toute cause d'erreur, de comparer la déviation produite par l'aiguille aimantée temporairement à celle qu'elle produit dans la même situation par son aimantation résiduelle, après la suppression du courant.

Soient

$\rho$ le rapport de ces déviations;
$m'$ et $m$ les quantités de magnétisme temporaire et permanente;
$\delta$ la double distance d'un pôle temporaire à l'extrémité voisine;
$d$ la même quantité pour l'aimantation permanente, déterminée par la formule (3) de l'article précédent;
$r$ le rapport $\frac{m'}{m}$.

On a, avec un haut degré d'approximation,

$$\rho = \frac{m'(l-\delta')}{m(l-d)} = r\,\frac{l-\delta}{l-d}. \tag{2}$$

Le tableau suivant indique les valeurs trouvées pour $r$ avec des aiguilles de $0^{mm},553$.

---

(1) J'ai vérifié (voir *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 37) que la formule de Green est conforme aux résultats de l'expérience, en ce qui concerne les aiguilles saturées.

(2) Au moment où l'on détache une aiguille du centre d'une aiguille beaucoup plus longue, elle se trouve soumise en chacun de ses points à la même force magnétique.

(3) Voir *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 43.

| COURANT. | $\rho$ | $r$ observé. | $r$ calculé. | DIFFÉRENCE. | POIDS. |
|---|---|---|---|---|---|
| 8,45 | 8,573 | 7,290 | 6,399 | + 0,891 | 2 |
| 10,56 | 4,255 | 3,590 | 3,932 | — 0,342 | 1 |
| 11,79 | 3,819 | 3,058 | 3,237 | — 0,179 | 4 |
| 12,81 | 3,293 | 2,765 | 2,848 | — 0,083 | 1 |
| 14,39 | 3,089 | 2,641 | 2,438 | + 0,203 | 2 |
| 15,25 | 3,000 | 2,271 | 2,279 | — 0,008 | 1 |
| 17,27 | 2,409 | 2,086 | 2,011 | + 0,077 | 1 |
| 18,75 | 2,073 | 1,727 | 1,877 | — 0,150 | 2 |
| 20,28 | 2,167 | 1,834 | 1,773 | + 0,061 | 6 |
| 23,56 | 1,919 | 1,622 | 1,623 | — 0,001 | 5 |
| 26,50 | 1,624 | 1,399 | 1,539 | — 0,150 | 6 |
| 31,32 | 1,581 | 1,374 | 1,442 | — 0,078 | 7 |
| 36,24 | 1,506 | 1,390 | 1,400 | — 0,010 | 2 |
| 41,79 | 1,462 | 1,331 | 1,368 | — 0,037 | 3 |
| 68,68 | 1,343 | 1,343 | 1,297 | + 0,042 | 7 |

Les nombres de la dernière colonne indiquent le nombre d'aiguilles employées pour déterminer la valeur correspondante de $\rho$; afin d'éviter toute erreur systématique, provenant du calcul de $r$, on a employé, pour diverses intensités du courant, des aiguilles de diverses longueurs dont on plaçait toujours le centre à une distance fixe de l'aiguille galvanométrique [1].

Les nombres de la quatrième colonne ont été calculés par la formule

$$r = 1,2619 + \frac{a}{(x-3)^2} \tag{3}$$

avec $\log a = 2,18355$; $x$ représente l'intensité du courant. La même formule convient très-bien pour exprimer le rapport $r$ pour des aiguilles plus grosses, de $0^{mm},687$ et $0^{mm},957$ de diamètre par exemple, à

[1] Pour cela, l'aiguille en expérience est maintenue au fond d'un tube fermé par un bout, qui pénètre à frottement dans la spirale magnétisante; ce tube est divisé en demi-millimètres, et l'on règle sa position au moyen d'un repère fixe tracé sur le tube qui porte la spirale.

la condition de faire $a = \alpha D$, $\alpha$ étant une constante [1]. Une formule analogue convient aussi pour l'acier de Bessemer étudié par Rowland, si ce n'est pour les intensités les plus fortes; le rapport $r$ présente alors une augmentation notable, observée aussi dans quelques-unes de mes expériences, et sur laquelle nous reviendrons par la suite.

Nous avons vu déjà qu'il n'y a pas, à proprement parler, de fonction de magnétisme permanent pour les aiguilles trempées de différents diamètres; il n'y a pas non plus pour ces aiguilles de véritable fonction de magnétisme temporaire, et l'on vient de voir qu'entre certaines limites de grosseur le rapport des deux quantités de magnétisme dépend du diamètre, résultat parfaitement incompatible avec l'existence de ces deux fonctions. Toutefois, si, trempant une série d'aiguilles de même diamètre, on les réduit ultérieurement à des diamètres divers par l'action de l'acide, nous savons déjà qu'il y a une fonction de magnétisme permanent bien déterminée, et il y a aussi une fonction de magnétisme temporaire : le rapport $r$ devient indépendant du diamètre; il conserve pour toutes les aiguilles la valeur correspondant au diamètre des aiguilles mères d'après la formule (3). Le tableau suivant se rapporte à des aiguilles de diamètre primitif égal à $1^{mm},178$.

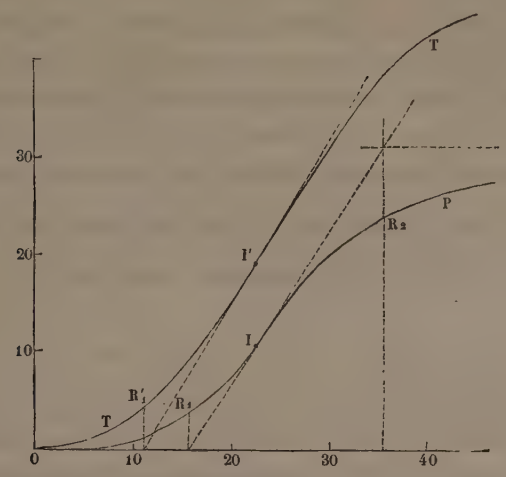
| COURANT. | $r$ | | DIFFÉRENCE. |
|---|---|---|---|
| | Valeur moyenne. | Calcul. | |
| 19,55 | 2,323 | 2,449 | — 0,126 |
| 27,91 | 1,862 | 1,786 | + 0,076 |
| 36,25 | 1,609 | 1,556 | + 0,053 |
| 45,50 | 1,498 | 1,442 | + 0,056 |

La seconde colonne fournit la moyenne des valeurs de $r$ obtenues avec les aiguilles rongées superficiellement et réduites à $1^{mm},088$, $0^{mm},348$, $0^{mm},854$ et $0^{mm},762$.

[1] Cette formule empirique réussit très-bien pour les aiguilles de $0^{mm},45$ à $1^{mm},50$, trempées au rouge sombre; mais elle est loin d'être générale.

On peut aussi s'assurer directement que la fonction de magnétisme temporaire est constante, comme on l'a fait pour la fonction de magnétisme permanent. La courbe T ci-jointe (*fig.* 3) a été obtenue au

Fig. 3.




moyen des aiguilles de $0^{mm},553$. On voit qu'elle présente les mêmes caractères généraux que la courbe P relative au magnétisme permanent. La portion de la courbe $R_1 R_2$ comprise entre le pied de la tangente au point d'inflexion et le point où cette tangente coupe l'asymptote horizontale de la courbe est la région de l'*aimantation rapide*. L'étendue de cette région, et les coordonnées des deux courbes correspondant aux points extrêmes caractérisent très-bien, à défaut des courbes complètes, les qualités magnétiques de l'acier employé.

### Article III. — *Aimantation temporaire et permanente des aiguilles minces faiblement trempées.*

Ces expériences ont été, comme les précédentes, faites avec le fil d'acier pour pivots, du commerce de l'horlogerie; mais, au lieu de tremper les aiguilles au rouge, on les employait dans l'état où les livre le fabricant, c'est-à-dire non trempées. Il ne peut être question ici d'expériences de rupture, et il est très-commode de prendre pour

point de départ non l'étude de l'aimantation permanente, mais celle de l'aimantation temporaire.

Les aiguilles étudiées sont placées à une distance de l'aiguille galvanométrique égale à $0^m,50$ ou $0^m,60$, et l'on opère d'après la méthode employée dans l'article précédent [1]. A cette distance, et avec les dimensions des aiguilles employées, la formule de Gauss est applicable sans faire intervenir les termes correctifs, et l'on peut comparer les moments d'aiguilles de longueurs différentes sans rien savoir *a priori* sur la position des pôles. Considérons $n$ aiguilles de longueurs différentes $l, l', \ldots$, et soumettons-les à l'action de la même force magnétisante; soient $\frac{X}{2}$ la distance d'un pôle à l'extrémité voisine dans une aiguille quelconque; $m, m', m'', \ldots$ les moments observés, on doit avoir

$$(1) \qquad \frac{m}{l-X} = \frac{m'}{l'-X} = \frac{m''}{l''-X} = \ldots$$

Ces équations permettent de vérifier que X est constant, et d'en obtenir la valeur approchée. On trouve que X ne change pas, quelle que soit l'intensité de la force magnétisante.

Pour des aiguilles de $0^{mm},920$ de diamètre on a trouvé $\frac{X}{2} = 10^{mm},33$; dans les mêmes aiguilles trempées dur $\frac{X}{2} = 4^{mm},6$. La quantité X est donc liée à l'état de l'acier; elle dépend de sa conductibilité magnétique, comme on le verra par la suite de ce Mémoire.

*Fonction de magnétisme temporaire.* — La distance polaire étant connue, on peut, comme pour les aiguilles trempées, construire la courbe qui représente cette fonction. Le tableau suivant a été obtenu pour des aiguilles de $0^{mm},526$ de diamètre. La seconde colonne se rapporte au magnétisme temporaire, la troisième au magnétisme permanent; la dernière donne la valeur du rapport $r$ de ces deux quantités.

---

[1] La quantité de magnétisme étant beaucoup plus forte dans les aiguilles faiblement trempées que dans les mêmes aiguilles fortement trempées, l'emploi des grandes distances n'affaiblit pas assez les valeurs absolues des déviations pour rendre les mesures incertaines dans le cas actuel, comme cela avait lieu dans l'article précédent.

| COURANT. | T | P | *r* |
|---|---|---|---|
| 3,87 | 1,003 | 0,300 | 3,343 |
| 5,44 | 1,589 | 0,871 | 1,867 |
| 6,57 | 2,416 | ..... | ..... |
| 8,00 | 3,375 | 2,297 | 1,891 |
| 9,87 | 3,702 | ..... | ..... |
| 11,56 | 4,434 | ..... | ..... |
| 14,84 | 5,017 | 3,073 | 1,633 |
| 20,25 | 5,487 | 3,265 | 1,681 |
| 32,50 | 6,704 | 3,731 | 1,796 |
| 43,75 | 6,449 | ..... | ..... |
| 60,37 | 7,543 | 3,819 | 1,975 |

Le tableau qui précède donne lieu à de nombreuses observations. En premier lieu, on remarque que l'aimantation, soit temporaire, soit permanente, commence à devenir sensible pour des valeurs très-faibles de la force magnétisante, ce qui n'avait pas lieu dans le cas de l'acier trempé très-dur; le point d'inflexion de chaque courbe est aussi plus voisin de l'origine, et au delà les courbes, surtout celles qui se rapportent au magnétisme temporaire, se rapprochent bien plus lentement de leur asymptote. En un mot, la variation des quantités de magnétisme s'effectue avec beaucoup moins de roideur, et les courbes qui s'y rapportent présentent moins d'analogie avec de simples lignes brisées, telles que les fournirait la vieille théorie de la force coercitive. Ce caractère se présente aussi de la manière la plus nette dans les courbes données par Rowland pour les diverses sortes de fer, en opposition avec les résultats fournis par l'acier Bessemer.

Remarquons aussi que le rapport *r*, que nous avons trouvé décroissant vers une certaine limite quand l'intensité de la force magnétisante croît indéfiniment, présente, dans le cas de l'acier trempé doux, un minimum très-net, au delà duquel *r* augmente d'une manière très-sensible. L'existence de ce minimum de *r*, qui se présente ici pour la première fois dans mes expériences, paraît cependant être un fait assez général. Je retrouve ce minimum dans toutes les expériences faites par

Rowland sur le fer, l'acier, le nickel et le cobalt, quoique avec des caractères particuliers, suivant l'état et la nature de la substance. On en jugera par le tableau suivant [1] :

| | F. | r. | |
|---|---|---|---|
| Fer Norway magnétique.... | 0,2673 | 3,875 | |
| | 0,9305 | 1,350 | minimum. |
| | 36,86 | 2,099 | |
| Fer *Burden's best* normal .. | 0,1456 | 3,823 | |
| | 1,655 | 1,366 | minimum. |
| | 36,60 | 2,073 | |
| *Burden's best* brûlé..... | 0,553 | 2,193 | |
| | 1,317 | 1,243 | minimum. |
| | 51,03 | 1,511 | |
| Acier Bessemer normal.... | 0,1356 | 18,176 | |
| | 7,495 | 1,358 | minimum. |
| | 38,99 | 1,523 | |
| Fil d'acier Stubb..... | 1,084 | 12,47 | |
| | 20,54 | 1,519 | minimum. |
| | 38,64 | 1,692 | |
| Nickel pur normal..... | 2,136 | 2,394 | |
| | 5,900 | 1,472 | minimum. |
| | 82,92 | 2,227 | |
| Cobalt pur normal..... | 3,925 | 7,160 | |
| | 21,06 | 2,452 | minimum. |
| | 117,00 | 3,244 | |

Les limites entre lesquelles sont demeurées comprises les forces magnétisantes que j'ai employées sont plus étroites que celles qui ont été atteintes dans les expériences du savant américain, et il me paraît très-probable que le minimum de $r$ se serait nettement accusé, même dans le cas de l'acier trempé très-dur, si la limite supérieure de F eût été suffisamment élevée dans mes expériences. La valeur de F

[1] Les valeurs de $r$ ont été calculées d'après les nombres fournis par Rowland dans les deux Mémoires publiés dans le *Philosophical Magazine*, en août 1873 et novembre 1874.

correspondant au minimum de $r$ s'abaisse beaucoup dans le cas de la trempe douce; c'est pourquoi l'existence de ce minimum a été aisément reconnue dans ce dernier cas.

## Article IV. — *Expériences sur les barreaux cylindriques.*

Les expériences précédentes ont été dirigées de manière à permettre l'étude de la fonction magnétisante et à déterminer directement la situation des pôles. Celles-ci ont eu pour objet de fournir les constantes caractéristiques de la distribution du magnétisme, dans des circonstances très-variées. On va voir que les deux problèmes dépendent en dernière analyse des mêmes éléments physiques à déterminer.

1. J'ai déjà établi ailleurs (¹) que les moments magnétiques $y$ d'aiguilles cylindriques minces, trempées dur et aimantées à saturation, sont représentés par la formule

$$(1) \qquad y = \mathrm{A}a^2\left(x - \frac{2}{\beta}\,\frac{e^{\beta\frac{x}{2}} - e^{-\beta\frac{x}{2}}}{e^{\beta\frac{x}{2}} + e^{-\beta\frac{x}{2}}}\right) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\mathrm{B}}{a},$$

donnée pour la première fois par Biot et rattachée par Green à la théorie de la force coercitive. J'ai fait voir aussi (²) que la même formule s'applique aux aiguilles tirées par voie de rupture du centre d'aiguilles non saturées. Des expériences incomplètes (³) m'avaient fait supposer à la même époque que la formule (1) n'était pas applicable aux aiguilles plus grosses, ce qui m'a engagé à reprendre dans le cas des barres cylindriques de 6 à 10 millimètres de diamètre une série de recherches analogues (⁴) dont je publie aujourd'hui les résultats.

La mesure des moments magnétiques a été effectuée par la méthode appliquée dans les articles II et III du présent Mémoire. La nécessité

(¹) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 34.
(²) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 43.
(³) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 44.
(⁴) Aciers tréfilés français, de MM. Peugeot et Jackson, en tringles de 2 mètres. Ces aciers sont extrêmement homogènes.

d'opérer parfois sur des barres de longueur considérable a exigé quelques dispositions spéciales que je vais indiquer en peu de mots. La bobine employée à produire l'aimantation est formée d'un tube en zinc de $1^m,20$ de long et de 5 centimètres de diamètre, portant 1 kilomètre de fil de cuivre isolé, roulé en 7 couches superposées. L'enroulement est disposé de façon que l'on puisse à volonté utiliser tout ou partie de la bobine. Un chemin de fer en bois horizontal, mobile autour d'un axe vertical qui passe par le prolongement du fil de l'aiguille galvanométrique ([1]), est disposé perpendiculairement au méridien magnétique. La bobine est montée sur quatre roulettes, et peut être éloignée à volonté; elle porte un index qui glisse le long du rail sur une règle divisée dont le zéro coïncide avec l'axe de rotation. Les barreaux sont soutenus dans l'axe même de la bobine par une disposition appropriée.

On a vérifié que la déviation produite par un barreau de 50 centimètres de long est exactement proportionnelle au cube de la distance de son milieu à l'aiguille, dès que cette distance est supérieure à 2 mètres : elle a été prise en général beaucoup plus grande.

Dans ces conditions, j'ai trouvé que la formule (1) pour des valeurs de A et de B convenablement choisies représente toujours exactement les moments magnétiques, pourvu que tous les barreaux, vierges d'aimantation antérieure, soient aimantés dans des conditions identiques. Elle s'applique aussi bien à l'aimantation temporaire qu'à l'aimantation permanente, aux barres d'acier doux qu'aux barres fortement trempées, et soit qu'on aimante à saturation, ou qu'on anime la bobine par un courant d'intensité constante trop faible pour saturer.

Les tableaux suivants sont destinés à montrer sur quelques exemples le degré d'accord de l'expérience et de la formule ([2]).

---

([1]) L'aiguille est rendue presque astatique à l'aide d'un barreau compensateur. *Voir* p. 137.

([2]) On croit utile de prévenir le lecteur que les nombres qui représentent en unités arbitraires les moments magnétiques mesurés dans cet article sont toujours évalués avec la même unité, plusieurs centaines de fois plus grande que celle dont on a fait usage dans les articles précédents. Comme les expériences correspondantes ont été faites les unes à Reims, les autres à Paris, les données ont manqué pour établir la valeur *exacte* du rapport des deux unités.

*Barreaux saturés de 7 millimètres de diamètre non trempés.*

| LONGUEURS. | AIMANTATION TEMPORAIRE. | | | AIMANTATION PERMANENTE. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Observation. | Calcul. | Différences. | Observation. | Calcul. | Différences. |
| c 5,0 | 0,75 | 0,758 | — 0,008 | 0,056 | 0,074 | — 0,018 |
| 7,2 | 2,13 | 2,062 | + 0,068 | 0,187 | 0,222 | — 0,035 |
| 9,8 | 4,12 | 4,368 | — 0,248 | 0,469 | 0,547 | — 0,078 |
| 12,4 | 7,13 | 7,852 | — 0,722 | 0,845 | 1,068 | — 0,223 |
| 15,0 | 12,54 | 11,896 | + 0,648 | 1,726 | 1,692 | + 0,023 |
| 19,8 | 20,25 | 20,358 | — 0,108 | 3,440 | 3,517 | — 0,077 |
| 25,0 | 30,19 | 30,260 | — 0,070 | 6,328 | 6,847 | — 0,519 |
| 30,0 | 37,72 | 40,087 | — 2,367 | 10,91 | 10,524 | + 0,386 |
| 34,5 | 48,96 | 49,037 | — 0,067 | 15,18 | 14,442 | + 0,368 |
| 40,0 | ..... | ..... | ..... | 21,81 | 21,81 | 0,000 |
| | $A_1 = 4,081$, $B_1 = \frac{1}{7,142}$. | | | $A_2 = 2,34$, $B_2 = \frac{1}{17,857}$. | | |

*Barreaux non saturés de 10 millimètres de diamètre non trempés.*

| LONGUEURS. | AIMANTATION TEMPORAIRE. | | | AIMANTATION PERMANENTE. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Observation. | Calcul. | Différences. | Observation. | Calcul. | Différences. |
| c 11,6 | 2,60 | 2,121 | + 0,479 | ..... | ..... | ..... |
| 15,0 | 3,63 | 3,828 | — 0,198 | ..... | ..... | ..... |
| 19,2 | 6,68 | 6,712 | — 0,032 | 1,223 | 1,198 | + 0,025 |
| 24,5 | 11,47 | 10,540 | + 0,930 | 2,573 | 2,357 | + 0,216 |
| 29,4 | 16,17 | 15,520 | + 0,650 | 4,149 | 3,781 | + 0,368 |
| 34,5 | 21,75 | 20,362 | + 1,388 | 5,333 | 5,659 | — 0,426 |
| 39,4 | 23,44 | 25,090 | — 1,650 | 7,571 | 7,788 | — 0,217 |
| | $A_1 = 0,9966$, $B_1 = \frac{1}{7,142}$. | | | $A_2 = 0,723$, $B_2 = \frac{1}{17,857}$. | | |

Les résultats fournis par l'acier non trempé, auquel se rapportent les tableaux précédents, sont particulièrement intéressants :

En premier lieu, le coefficient B est indépendant de l'intensité du courant qui produit l'aimantation. A l'aimantation temporaire correspond une valeur déterminée

$$B_1 = \frac{1}{7,142};$$

à l'aimantation permanente une valeur beaucoup plus petite

$$B_2 = \frac{1}{17,857}.$$

Ce coefficient ne change pas avec le diamètre des barreaux. On voit aisément, en faisant $x$ très-grand dans la formule (1), que $\frac{1}{\beta} = \frac{a}{B}$ représente la distance d'un pôle à l'extrémité voisine dans les barres longues. Pour $a = 1^c$, on a

$$\frac{1}{\beta_1} = 7^c,142, \quad \frac{1}{\beta_2} = 17^c,857,$$

et ces distances polaires sont caractéristiques de l'acier employé, l'une pour l'aimantation temporaire, l'autre pour l'aimantation permanente.

Deuxièmement, le coefficient $A_1$ relatif à la saturation temporaire est plus grand que le coefficient $A_2$ correspondant à la saturation permanente. En général $A_1$ et $A_2$ sont deux fonctions de l'intensité de la force magnétisante qui ne diffèrent pas de celles que nous avons étudiées dans les articles I, II et III, sous le nom de *fonctions de magnétisme temporaire et permanent*. Mais les expériences sur les barres n'ont pas été dirigées dans le but d'étudier la variation de ces fonctions.

Les barreaux trempés fournissent des résultats analogues, pourvu qu'on ne considère que des barreaux de même trempe. Les valeurs de $A_1$ et de $A_2$ sont plus faibles que pour les barreaux naturels; la valeur de $B_1$ pour la trempe que j'ai employée devient égale à $\frac{1}{5}$ et demeure constante quelle que soit l'intensité de la force magnétisante. Mais la valeur de $B_2$ croît avec l'intensité de cette force; sa valeur initiale est $\frac{1}{13,75}$ et se réduit à $\frac{1}{8}$ pour les forces magnétisantes les plus intenses

que j'ai employées. Ces résultats sont du même genre que ceux que j'ai obtenus dans l'Article I pour les valeurs de $d = \frac{2a}{B_2}$.

Tels sont les résultats directs obtenus par l'étude des moments. Passons aux inductions qu'on en tire relativement à la distribution. Si l'on admet que la quantité de magnétisme libre contenue dans une tranche d'épaisseur $du$ située à une distance $u$ du milieu d'un barreau quelconque de la série que l'on étudie soit représentée par la formule

$$(2) \qquad z = A a^2 \beta \frac{e^{\beta u} - e^{-\beta u}}{e^{\frac{\beta x}{2}} - e^{-\frac{\beta x}{2}}},$$

le moment magnétique $y$ sera représenté par la formule (1). Les mêmes lettres dans les deux formules se rapportent aux mêmes quantités.

Inversement nous admettrons avec Biot [1] que, si les moments magnétiques vérifient la formule (1), les distributions sont conformes à la formule (2). Les expériences précédentes nous fournissent les valeurs des deux constantes A et B caractéristiques de la distribution.

Pour nous rendre un compte exact du rôle physique de ces constantes, considérons le cas d'une barre de longueur infinie. La distribution est alors représentée, à partir de l'extrémité de la barre prise pour origine, par la formule

$$(2\ bis) \qquad z = A a^2 \beta e^{-\beta u} = AB a e^{-\frac{B}{a} u}.$$

Si l'on fait varier seulement A, la courbe de distribution demeure semblable à elle-même, sa *forme* n'est pas modifiée. Il en est ainsi dans le cas de l'aimantation temporaire produite par des courants de différente intensité. Si, au contraire, on fait varier B, la courbe de distribution pour une même valeur de l'ordonnée extrême se rapproche d'autant plus vite de l'axe des abscisses que B est plus grand; quand B augmente, la distribution magnétique se *raccourcit;* elle *s'allonge* quand B dimi-

---

[1] L'induction que nous employons ici n'a rien de *nécessaire a priori*. On peut concevoir une infinité de distributions magnétiques différentes fournissant les mêmes valeurs des moments magnétiques; mais la formule (2) ayant été vérifiée directement par divers observateurs, on peut employer le mode de raisonnement que nous empruntons à Biot en toute sécurité.

nue. Ainsi l'aimantation temporaire est plus *courte* que l'aimantation permanente [1].

On peut, avec M. Jamin, appeler A le coefficient de *capacité*, $\frac{1}{B}$ le coefficient de *conductibilité* de l'acier étudié. La mesure de la distance des pôles d'une barre longue à l'extrémité voisine fournit la valeur absolue de son coefficient de conductibilité dans les conditions de l'aimantation. La *conductibilité temporaire* est invariable, quelle que soit l'intensité de la force magnétisante; il n'en est ainsi pour la *conductibilité permanente* que dans le cas de l'acier non trempé [2].

2. Après avoir étudié la distribution dans une barre vierge d'aimantation antérieure, j'ai cherché à appliquer la même méthode aux barres déjà aimantées que l'on soumet une seconde fois à l'action magnétisante. J'ai choisi le cas le plus simple : celui des barres non trempées, primitivement saturées.

*Action d'un courant direct.* — Une deuxième application d'une force magnétisante directe n'altère pas le moment permanent d'une barre saturée; mais quelque faible que puisse être cette force, le barreau acquiert, pendant qu'il est soumis à son action, un moment temporaire supérieur à son moment permanent.

De plus on reconnaît qu'il est impossible de représenter ces moments temporaires par une formule unique de la forme de l'équation (1); on réussit au contraire très-bien en prenant la formule à deux termes

$$(3)\qquad y = c_1 A_1 \left( x - \frac{2}{\beta_1} \frac{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}} \right) + c_2 A_2 \left( x - \frac{2}{\beta_2} \frac{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}} \right),$$

---

[1] Aucune force constante ne peut donc produire sur un barreau une distribution de même forme que la distribution permanente. Ce résultat est en opposition avec la théorie de la force coercitive.

[2] Le nombre des fonctions ou des constantes nécessaires pour définir complétement un acier donné au point de vue magnétique est, comme on voit, assez considérable. Il faut connaître les deux fonctions de magnétisme $A_1$ et $A_2$ (ou au moins les constantes caractéristiques de l'aimantation rapide) et les deux coefficients de conductibilité $B_1$ et $B_2$. Encore ne définit-on ainsi que l'état de l'acier *tel qu'il est*, et l'étude complète est à refaire pour chaque degré de trempe.

dans laquelle $A_1$ et $A_2$, $\beta_1$ et $\beta_2$ ont les valeurs caractéristiques de l'aimantation temporaire et de l'aimantation permanente à saturation; de plus $c_1$ et $c_2$ sont déterminés par les conditions suivantes :

1° Le premier terme contenant les coefficients *temporaires* représente le moment temporaire (c'est-à-dire total) que le barreau vierge d'aimantation prendrait par une première application de la force magnétisante F employée.

2° Le deuxième terme est la différence du moment permanent de saturation et du moment permanent que la force F est capable de produire. Ainsi soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les *capacités* temporaire et permanente du barreau pour la force F, on a

$$(4) \qquad \begin{cases} c_1 A_1 = \alpha_1, \\ c_2 A_2 = A_2 - \alpha_2. \end{cases}$$

Appliquant la méthode de raisonnement de Biot, nous serons conduits à représenter la distribution du magnétisme dans les barreaux considérés par la formule (5),

$$(5) \qquad z = \alpha_1 a^2 \beta_1 \frac{e^{\beta_1 u} - e^{-\beta_1 u}}{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}} + (A_2 - \alpha^2) a^2 \beta_2 \frac{e^{\beta_2 u} - e^{-\beta_2 u}}{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}}.$$

La distribution magnétique est la superposition de deux distributions, l'une *courte* (temporaire) égale à celle que produirait une première application de la force F; l'autre *longue* (permanente) égale au résidu de la distribution primitive diminuée en quantité de la portion de magnétisme permanent correspondant à F. Ce qu'il y a de curieux, c'est que la totalité de la distribution courte n'est pas empruntée à la distribution permanente primitive; de nouveau magnétisme est évoqué des profondeurs moléculaires pour faire l'appoint $\alpha_1 - \alpha_2$, tandis qu'une portion souvent très-considérable $A_2 - a_2$ de l'aimantation primitive demeure distribuée à la façon *permanente* (distribution longue) comme insensible à l'action de la force magnétisante. Il me semble qu'il y a là un fait de haut intérêt, au point de vue de la théorie du magnétisme.

Les tableaux suivants sont destinés à fournir des exemples relatifs à l'application des formules (3) et (4). Ils se rapportent à des barreaux de 1 centimètre de diamètre.

| LONGUEURS. | MOMENT DE SATURATION | | MOMENT DE RÉAIMANTATION | | DIFFÉRENCES. |
|---|---|---|---|---|---|
| | temporaire. | permanente. | observé. | calculé. | |
| c 39,6 | 99,085 | 33,95 | 56,834 | 56,834 | 0,000 |
| 34,4 | 82,214 | 22,45 | 42,391 | 43,169 | — 0,878 |
| 29,4 | 60,729 | 15,38 | ..... | ..... | ..... |
| 24,8 | 43,730 | 8,92 | 21,478 | 22,166 | — 0,688 |
| 22,1 | 29,066 | 6,91 | 14,635 | 15,127 | — 0,492 |
| 19,6 | 23,422 | 5,13 | 12,033 | 11,883 | + 0,150 |
| 15,6 | 10,712 | 1.86 | 6,148 | 5,160 | + 0,988 |

$c_1$ observé..... 0,40024
$c_2$ observé..... 0,52528 calculé..... 0,52924.

Les valeurs de $c_1$ et $c_2$ ont été mesurées par l'aimantation de barres de même espèce que celles de l'expérience, mais aimantées pour la première fois. La valeur dite *calculée* de $c_2$ est celle qui a dû être employée concurremment avec $c_1$ pour obtenir les nombres de la quatrième colonne.

Voici d'ailleurs le résumé de toute une expérience pour cinq valeurs de F différentes :

| $c_1$ observé. | $c_2$ observé. | $c_2$ calculé. |
|---|---|---|
| 0,03688 | 0,9625 | 0,9630 |
| 0,05123 | 0,9370 | 0,9370 |
| 0,13113 | 0,8418 | 0,8826 |
| 0,77836 | 0,0770 | 0,0232 |

Ces résultats présentent un accord général satisfaisant avec ceux que M. Jamin a obtenus par la mesure des ordonnées extrêmes, à l'aide du contact d'épreuve (¹).

*Action d'un courant inverse sur une barre cylindrique saturée.* — Dans ce cas, le barreau conserve après la cessation du courant un moment

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 417 et suivantes.

permanent positif ou négatif, que l'on représente très-bien par la formule (1), avec la valeur $B_2$ de B caractéristique de l'aimantation permanente. Il n'a pas été possible de formuler par une loi simple la relation du coefficient de capacité $c_2 A_2$, à la capacité permanente $\alpha_2$ correspondante; la diminution $A_2(1-c_2)$ est beaucoup plus grande que $\alpha$, et paraît se rapprocher de la limite $2\alpha_2$ assignée par M. Jamin, quand on considère des forces de plus en plus grandes.

Le moment des barreaux pendant l'action du courant ne peut être représenté que par une formule à deux termes

$$(6)\qquad y = c_2 A_2\left(x - \frac{2}{\beta_2}\,\frac{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}}\right) - c_1 A_1\left(x - \frac{2}{\beta_1}\,\frac{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} - e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}}{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}}\right).$$

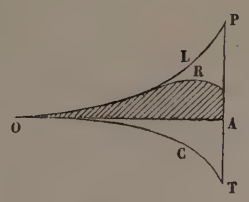
La valeur $c_2 A_2$ est égale à la valeur fixée expérimentalement par les expériences du paragraphe précédent; quant à $c_1 A_1$, il est, comme dans le cas de la réaimantation, égal à $\alpha_1$.

La formule de distribution correspondante

$$z = c_2 A_2 a^2 \beta_2 \frac{e^{\beta_2 u} - e^{-\beta_2 u}}{e^{\frac{\beta_2 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}} - \alpha_1 a^2 \beta_1 \frac{e^{\beta_1 u} - e^{-\beta_1 u}}{e^{\frac{\beta_1 x}{2}} + e^{-\frac{\beta_1 x}{2}}}$$

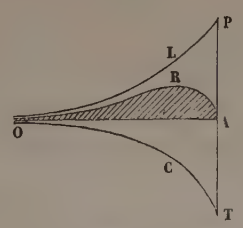
présente une particularité singulière. Elle représente la superposition d'une distribution *longue* et d'une distribution inverse plus courte. La forme de la distribution résultante diffère profondément de celle de la distribution ordinaire.

Fig. 4.



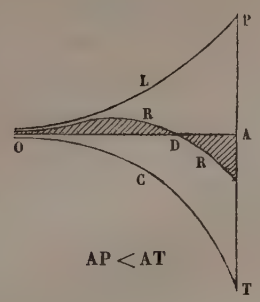

AP > AT

Fig. 5.




AP = AT

Fig. 6.




AP < AT

Les courbes ci-dessus sont destinées à montrer aux yeux les cas

principaux. Pour des valeurs convenables de la force F la courbe de distribution coupe l'axe des abscisses comme on le voit dans la *fig.* 6, et comprend deux plages de signe contraire. Le barreau porteur de cette distribution présente deux points conséquents D symétriques par rapport à son milieu O.

Cette conséquence des formules des moments est trop curieuse pour que je n'aie pas cherché à la mettre en évidence par des expériences directes. A cet effet, j'ai réglé l'intensité du courant qui désaimante, de manière que l'action d'un barreau préalablement saturé fût nulle sur un point éloigné, c'est-à-dire que la position d'équilibre de mon aiguille galvanométrique était la même que le barreau fût ou non plongé dans la spirale. Dans une expérience, le barreau saturé, de 40 centimètres de long et de 1 centimètre de diamètre, produisait une déviation positive de 102 divisions de la règle, et, après la cessation du courant, il déviait encore dans le même sens de 8 divisions. Son action pendant le passage du courant était inférieure à 0,25 d'une division, ce qui est justement la limite des erreurs de lecture. Son moment magnétique était donc sensiblement nul. J'ai alors fait glisser la bobine le long de son chemin de fer de bois, et constaté, à l'aide d'une petite aiguille très-fortement trempée et rendue sensiblement astatique par un barreau compensateur, l'existence de polarités contraires énergiques à l'extrémité même du barreau et un peu plus près du milieu. Cette expérience délicate, mais absolument concluante, grâce à la régularité et à la symétrie des résultats obtenus, ne peut laisser aucun doute sur la légitimité de l'induction qui nous a guidé dans cette portion de notre étude.

En résumé, il semble ressortir de ces dernières expériences qu'il existe entre l'aimantation temporaire et l'aimantation permanente une sorte d'indépendance plus tranchée qu'on ne l'avait admis jusqu'ici. Je persiste à penser qu'on doit l'attribuer au moins en partie à une différence d'origine résultant d'une véritable hétérogénéité magnétique de l'acier (¹).

---

(¹) Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, t. III, p. 52.

# MÉMOIRE

SUR

# LES COMBINAISONS RÉGULIÈRES

ET

# LEURS APPLICATIONS,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

## INTRODUCTION.

L'un des problèmes les plus généraux qu'on puisse se proposer sur les combinaisons nous paraît être celui-ci :

*Étant données m lettres distinctes a, b, c,..., combien peut-on, avec elles, former de groupes contenant chacun n lettres distinctes ou identiques, et satisfaisant à ces conditions que deux groupes quelconques diffèrent autrement que par l'ordre des lettres et que, dans un même groupe, la lettre a ne soit pas répétée plus de $\alpha$ fois, la lettre b plus de $\beta$ fois, etc.*

Ce problème est évidemment fort compliqué. Il se simplifie beaucoup dans le cas où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... sont tous égaux à un même nombre $p$; mais alors nous avons, non plus les groupes précédents, que nous pourrions nommer les *combinaisons générales de m lettres n à n*, mais des groupes plus particuliers que nous appellerons les *combinaisons régulières d'ordre p de m lettres n à n*.

Les *combinaisons simples* et les *combinaisons complètes*, les seules qu'on ait étudiées jusqu'ici en détail, ne sont autre chose que les combinaisons régulières du premier et du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Ce sont les combinaisons régulières qui forment l'objet de ce Mémoire. Des cinq Chapitres qui le composent, les trois premiers sont

consacrés aux combinaisons régulières elles-mêmes; les deux autres à leurs applications.

Nous revenons d'abord (Chap. I) sur la définition fondamentale; nous montrons que la connaissance du nombre des combinaisons régulières fournit immédiatement la solution de certaines questions d'Algèbre, d'Analyse indéterminée et de Calcul des probabilités; nous faisons connaître les notations que nous avons choisies et les conventions que nous avons dû faire pour rendre les formules générales.

Nous passons ensuite (Chap. II) aux propriétés du nombre des combinaisons régulières. Ces propriétés sont nombreuses, remarquables, et, comme il devait arriver, toutes celles des combinaisons simples n'en sont que des cas particuliers. Elles se réduisent pour la plupart à des identités, et toutes ces identités sont établies, pour ainsi dire sans calcul, par des procédés purement combinatoires. On sait que ces procédés consistent à trouver deux expressions différentes du nombre des combinaisons qui satisfont à des conditions données et à les égaler. Une identité ainsi établie correspond, en général, à un certain mode de classification des combinaisons. En ces matières, la difficulté principale, pour ne pas dire la seule, est de faire des classifications bien nettes et des dénombrements bien complets.

Ces propriétés connues, nous en déduisons (Chap. III) des moyens divers de calculer le nombre des combinaisons régulières. Nous trouvons, toujours par les seuls procédés combinatoires, qu'on peut effectuer ce calcul de quatre façons différentes : 1° par voie récurrente; 2° par voie récurrente encore, mais symboliquement; 3° par une formule qui donne immédiatement l'inconnue à l'aide des nombres des combinaisons simples et des combinaisons complètes; 4° enfin, par un triangle dont celui de Pascal n'est que le premier cas particulier. De ces procédés, le dernier est de beaucoup le plus rapide. Au reste, chose remarquable, cette rapidité plus grande est un avantage qu'apportent avec eux tous les triangles, tableaux ou abaques employés jusqu'ici en Mathématiques, notamment ceux que M. Bourget a donnés dans son Mémoire *Sur les nombres de Cauchy* (1) et dans sa *Théorie des permutations* (2).

---

(1) *Journal de Liouville*, 2e série, t. VI, p. 61.
(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. X, p. 254.

Il se trouve que les nombres des combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres ne sont autre chose que les coefficients du développement de

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p)^m.$$

Ces coefficients ont été remarqués, pour la première fois, par Moivre [1], à propos d'un problème sur les probabilités; et récemment, en 1863, M. J.-J.-A. Mathieu a appelé sur eux l'attention des géomètres [2]. Les résultats obtenus par nous dans les trois Chapitres précédents nous permettent de donner une théorie assez complète des propriétés et du mode de calcul de ces coefficients. C'est là une généralisation très-large du binôme; elle forme l'objet du Chapitre IV, qui n'est ainsi qu'une application des combinaisons régulières. Évidemment on aurait pu tirer, par voie algébrique, du développement lui-même, tous les résultats que nous avons trouvés précédemment. C'est un travail que nous avons fait, à titre de vérification, mais que nous ne reproduisons pas ici, pour deux raisons : d'abord parce que ceci est une étude sur les combinaisons; ensuite parce que les démonstrations combinatoires nous semblent infiniment préférables aux démonstrations de calcul.

Le cinquième Chapitre est encore une application des combinaisons régulières : il est consacré aux combinaisons générales dont nous avons parlé en commençant. Nous y donnons les moyens d'en calculer le nombre; et nous montrons que ce calcul, en général fort long et fort compliqué, se simplifie et s'abrége dans tous les cas, un seul excepté, par la considération des combinaisons régulières.

Tels sont les objets respectifs des cinq Chapitres qui composent ce Mémoire. Avant de les aborder, nous pensons devoir avertir que la formule donnée par nous comme troisième procédé pour le calcul des combinaisons régulières a été trouvée par Moivre, d'une façon très-différente de la nôtre, et reproduite, d'après lui, dans la plupart des ouvrages sur le Calcul des probabilités.

---

(1) *Miscellanea analytica*, p. 196.

(2) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 509.

# CHAPITRE I.

## PRÉLIMINAIRES.

### § I. — *Définition des combinaisons régulières.*

1. *Nous appelons combinaisons régulières n à n, d'ordre p, des m lettres distinctes a, b, c,... les groupes de n lettres distinctes ou identiques qui peuvent être formés avec les lettres données et qui satisfont à ces conditions que deux groupes quelconques diffèrent entre eux autrement que par l'ordre des lettres et que, dans un même groupe, l'une quelconque des lettres données ne soit jamais répétée plus de p fois.*

*Exemple.* — Les combinaisons régulières 3 à 3, d'ordre 2, des quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d* sont au nombre de seize ; les voici :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *aab* | *abc* | *add* | *bcd* |
| *aac* | *abd* | *bbc* | *bdd* |
| *aad* | *acc* | *bbd* | *ccd* |
| *abb* | *acd* | *bcc* | *cdd* |

*Exemple.* — Les combinaisons régulières 4 à 4, d'ordre 2, des cinq lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sont au nombre de quarante-cinq. Ce sont les suivantes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *aabb* | *aaee* | *abee* | *bbcd* | *bcee* |
| *aabc* | *abbc* | *accd* | *bbce* | *bdde* |
| *aabd* | *abbd* | *acce* | *bbdd* | *bdee* |
| *aabe* | *abbe* | *acdd* | *bbde* | *ccdd* |
| *aacc* | *abcc* | *acde* | *bbee* | *ccde* |
| *aacd* | *abcd* | *acee* | *bccd* | *ccee* |
| *aace* | *abce* | *adde* | *bcce* | *cdde* |
| *aadd* | *abdd* | *adee* | *bcdd* | *cdee* |
| *aade* | *abde* | *bbcc* | *bcde* | *ddee* |

2. Il résulte immédiatement de cette définition :

Que les *combinaisons régulières du premier ordre ne sont autre chose que les combinaisons simples ou sans répétition ;*

Que *celles dont l'ordre p est égal ou supérieur à n ne sont autre chose que ce qu'on appelle les combinaisons complètes de m lettres n à n*;

Que *le nombre des combinaisons régulières d'ordre p d'une seule lettre n à n est toujours égal à l'unité, quelle que soit la valeur, forcément égale ou inférieure à p, du nombre n*;

Que *le nombre des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres mp à mp est toujours, lui aussi, égal à l'unité;*

Enfin, que *le nombre des combinaisons régulières d'ordre p de m lettres prises une à une est toujours égal à m.*

## § II. — *Importance des combinaisons régulières.*

3. Pour donner une idée de l'importance de cette étude des combinaisons régulières, considérons les problèmes suivants :

*Étant donné le monôme*

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_m)^p,$$

*combien admet-il de diviseurs du degré n?*

*Étant donné le produit de m facteurs*

$$(1 + a_1 + a_1^2 + \ldots + a_1^p)(1 + a_2 + a_2^2 + \ldots + a_2^p)\ldots(1 + a_m + a_m^2 + \ldots + a_m^p),$$

*combien son développement présente-t-il de termes du degré n?*

*Étant donné un polynôme* X, *entier en x, de degré m et dont toutes les racines sont distinctes, combien l'expression*

$$X^p$$

*admet-elle de diviseurs du degré n?*

*Étant donnée l'équation indéterminée*

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_m = n,$$

*où n est entier et où chacune des inconnues peut prendre les valeurs* 0, 1, 2, 3,..., *p, combien cette équation admet-elle de solutions?*

Ces quatre problèmes, qui ne diffèrent point au fond, admettent une solution identique, qui est le nombre des combinaisons régulières d'ordre $p$, de $m$ lettres, $n$ à $n$.

4. Considérons encore le problème suivant sur les probabilités :

*De combien de manières peut-on obtenir le nombre n par le jet de m dés ayant chacun p faces marquées* 1, 2, 3,..., $p$?

Si l'on y réfléchit un peu, on voit que le nombre cherché n'est autre que le nombre des combinaisons régulières d'ordre $p-1$, de $m$ lettres, prises $n-m$ à $n-m$.

## § III. — *Notation.*

5. Il résulte de la définition que nous avons donnée au n° 1 que le nombre des combinaisons régulières d'ordre $p$, de $m$ lettres, prises $n$ à $n$, est, pour parler le langage de M. Méray (¹), *une variante à trois indices*, savoir : 1° le nombre total $m$ des lettres; 2° le nombre $n$ de celles qui entrent dans chaque combinaison; enfin, 3° l'ordre $p$.

Nous représenterons cette variante par le symbole

$$(m, n)_p.$$

6. Cela posé, si nous désignons par $C_m^n$ le nombre des combinaisons simples, et, comme nous l'avons fait déjà (²), par $K_m^n$ le nombre des combinaisons complètes de $m$ lettres $n$ à $n$, les remarques que nous avons faites au n° 2 se traduiront immédiatement par les égalités suivantes :

$$(m, n)_1 = C_m^n,$$
$$(m, n)_{n+r} = K_m^n,$$
$$(1, n)_p = 1,$$
$$(m, mp)_p = 1,$$
$$(m, 1)_p = m.$$

Nous ferons un continuel usage de ces cinq relations.

## § IV. — *Conventions.*

7. Pour que les formules que nous établirons soient tout à fait générales, il est bon de donner au symbole

$$(m, n)_p,$$

(¹) *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*, p. 1.
(²) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, p. 84.

dans les cas où il n'a plus de sens par lui-même, une valeur de convention.

Nous le regarderons :

*Comme nul, toutes les fois que $n$ sera soit négatif, soit supérieur à $mp$;*

*Comme nul aussi, toutes les fois que $m$ sera nul, $n$ et $p$ étant différents de zéro;*

*Comme égal à l'unité, lorsque $n$ sera nul, $m$ et $p$ étant différents de zéro;*

*Enfin comme égal encore à l'unité, lorsque, $p$ n'étant pas égal à zéro, $m$ et $n$ seront nuls en même temps.*

## CHAPITRE II.

### PROPRIÉTÉS DES COMBINAISONS RÉGULIÈRES.

#### § I. — *Relations entre les combinaisons $n$ à $n$ et les combinaisons $mp - n$ à $mp - n$.*

8. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = (m, mp - n)_p.$$

En effet, considérons l'ensemble de $mp$ lettres formé des $m$ lettres distinctes données répétées chacune $p$ fois. Si nous en ôtons $n$ lettres, il en reste $mp - n$. Les $n$ qu'on enlève constituent une combinaison régulière d'ordre $p$ de $m$ lettres $n$ à $n$; les $mp - n$ qui restent constituent une combinaison régulière d'ordre $p$ de $m$ lettres $mp - n$ à $mp - n$. Les combinaisons $n$ à $n$ et les combinaisons $mp - n$ à $mp - n$ se correspondent donc chacune à chacune : leur nombre est donc le même.

9. Corollaire. — *Dans la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p,$$

*les termes équidistants des extrêmes sont égaux.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

10. *Remarque.* — Si, dans le théorème et le corollaire précédents, on fait $p$ égal à l'unité, on retrouve l'une des propriétés les plus connues des combinaisons simples.

## § II. — *Relations entre les combinaisons de m lettres et les combinaisons de m — 1 lettres.*

11. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p.$$

En effet, parmi les combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres $n$ à $n$, celles qui ne contiennent pas une certaine lettre, $a$ par exemple, sont en nombre

$$(m-1, n)_p;$$

celles qui la contiennent une fois, en nombre

$$(m-1, n-1)_p;$$

celles qui la contiennent deux fois, en nombre

$$(m-1, n-2)_p;$$

et ainsi de suite; celles qui la contiennent $p$ fois, en nombre

$$(m-1, n-p)_p.$$

On a donc identiquement, comme il fallait le démontrer,

$$(m, n)_p = (m-1, n)_p + (m-1, n-1)_p + (m-1, n-2)_p + \ldots + (m-1, n-p)_p;$$

et, grâce aux conventions du n° 7, cette formule est générale.

12. *Remarque.* — Le théorème précédent peut évidemment s'énoncer ainsi :

*Si l'on écrit l'une sous l'autre, comme ci-dessous, les deux suites*

$$\begin{array}{lllll} (m-1, 0)_p, & (m-1, 1)_p, & (m-1, 2)_p, & (m-1, 3)_p, & \ldots, \\ (m, 0)_p, & (m, 1)_p, & (m, 2)_p, & (m, 3)_p, & \ldots, \end{array}$$

*chaque terme de la suite inférieure est égal au terme supérieur correspondant, plus les p termes supérieurs placés à la gauche de celui-ci.*

13. Corollaire. — *La suite*

$$(2,0)_p,\quad (2,1)_p,\quad (2,2)_p,\quad (2,3)_p,\quad \ldots,\quad (2,2p)_p$$

*se compose des $p$ nombres $1, 2, 3, \ldots, p$, suivis du nombre $p+1$, lequel est suivi lui-même des $p$ nombres $p, p-1, p-2, \ldots, 1$.*

Cela résulte immédiatement de la remarque précédente, si l'on se rappelle que, d'après la remarque du n° 6 et la convention du n° 7, les termes de la suite

$$(1,0)_p,\quad (1,1)_p,\quad (1,2)_p,\quad (1,3)_p,\quad \ldots,\quad (1,p)_p$$

sont tous égaux à l'unité.

## § III. — *Grandeurs relatives des nombres des combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres.*

14. Théorème. — *Dans la suite*

$$(m,0)_p,\quad (m,1)_p,\quad (m,2)_p,\quad (m,3)_p,\quad \ldots,\quad (m,mp)_p,$$

*les termes croissent jusqu'au milieu et décroissent au delà.*

Si l'on tient compte du corollaire du n° 9, il suffit de prouver la première partie du théorème.

Supposons, pour cela, le théorème vrai pour la suite

$$(m-1,0)_p,\quad (m-1,1)_p,\quad (m-1,2)_p,\quad (m-1,3)_p,\quad \ldots,\quad [m-1(m-1)p]_p.$$

Du théorème du n° 11 nous tirons

$$(m,n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

$$(m,n+1)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n+1-k)_p$$

et par suite

$$(1)\qquad (m,n+1)_p - (m,n)_p = (m-1,n+1)_p - (m-1,n-p)_p.$$

Cela étant, supposons que le terme

$$(m,n+1)_p$$

ne dépasse pas le milieu de la suite considérée, c'est-à-dire de la suite des nombres des combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres; nous avons alors

$$n+2 \leq \frac{mp+1}{2}.$$

Il s'ensuit :

1° Que le terme

$$(m-1, n-p)_p$$

précède le milieu de la suite des nombres des combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m-1$ lettres; car, s'il en était autrement, on aurait

$$n-p+1 \geq \frac{(m-1)p+1}{2},$$

d'où l'on tirerait

$$2n+1 \geq mp+p$$

et par suite

$$n+2 > \frac{mp+1}{2},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse;

2° Que si le terme

$$(m-1, n+1)_p$$

dépasse le milieu de la suite des nombres des combinaisons régulières de $m-1$ lettres, il s'en écarte moins au delà que le terme

$$(m-1, n-p)_p$$

ne s'en écarte en deçà. En effet, de l'inégalité

$$n+2 \leq \frac{mp+1}{2},$$

on tire

$$2n+4 \leq mp+1,$$

ce qui donne

$$2n+3 < mp+1$$

et par suite

$$(n+2) - \frac{(m-1)p+1}{2} < \frac{(m-1)p+1}{2} - (n-p+1).$$

Si donc, comme on le suppose, le théorème est vrai pour la suite des nombres des combinaisons de $m-1$ lettres, le second membre de

l'égalité (1) est positif; le premier l'est donc aussi, et le théorème est vrai pour la suite des nombres des combinaisons de $m$ lettres. Or le théorème est vrai lorsque $m$ est égal à 2, d'après le corollaire du n° **13**; donc il est général.

**15.** *Remarque.* — Pour avoir, parmi les combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres, celles dont le nombre est maximum, nous distinguerons deux cas :

*Si $mp+1$ est impair, il faudra prendre les combinaisons $\frac{mp}{2}$ à $\frac{mp}{2}$.*

*Si $mp+1$ est pair, il faudra les prendre $\frac{mp-1}{2}$ à $\frac{mp-1}{2}$, ou bien $\frac{mp+1}{2}$ à $\frac{mp+1}{2}$.*

## § IV. — *Relation entre les combinaisons de m lettres et celles de m — 1, m — 2,... lettres.*

**16.** Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p.$$

Pour le démontrer, revenons au théorème du n° **11**; nous en tirons

$$(m, n)_p = (m-1, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

$$(m-1, n)_p = (m-2, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (m-2, n-k)_p,$$

$$(m-2, n)_p = (m-3, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (m-3, n-k)_p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(2, n)_p = (1, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (1, n-k)_p,$$

$$(1, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} (0, n-k)_p;$$

d'où, en ajoutant membres à membres et supprimant les termes communs,

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} [(m-1, n-k)_p + (m-2, n-k)_p + (m-3, n-k)_p + \ldots + (0, n-k)_p],$$

ce qui démontre le théorème.

17. *Remarque.* — Ce théorème souffre une exception : il n'est pas vrai lorsque le premier membre est égal à

$$(m, 0)_p.$$

L'origine de cette anomalie s'aperçoit facilement : dans les égalités que nous avons ajoutées membres à membres, la dernière n'est pas vraie lorsque $n$ est égal à zéro. En n'employant pas cette dernière égalité, on trouverait l'identité

$$(m, n)_p = (1, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p,$$

qui ne serait sujette à aucune exception.

## § V. — *Somme des nombres des combinaisons régulières de m lettres.*

18. Théorème. — *Si, dans la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p,$$

*on prend tous les termes dont les seconds indices, divisés par $p+1$, donnent le même reste, ces termes ont une somme constante, quel que soit ce reste.*

Soit, en effet, $\alpha$ ce reste, $\alpha$ étant forcément l'un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, p$. On a, d'après le théorème du n° 11,

$$(m, t(p+1)+\alpha)_p = \sum_{k=0}^{k=p} [m-1, t(p+1)+\alpha-k]_p.$$

Cela posé, soit $\lambda$ la partie entière du quotient de $mp-\alpha$ par $p+1$;

nous déduisons de l'équation précédente

$$\sum_{t=0}^{t=\lambda}[m, t(p+1)+\alpha]_p = \sum_{t=0}^{t=\lambda}\sum_{k=0}^{k=p}[m-1, t(p+1)+\alpha-k]_p.$$

Or le second membre de cette dernière égalité est évidemment égal à

$$\sum_{k=0}^{k=(m-1)p}(m-1, k)_p;$$

il est, par suite, constant, quel que soit $\alpha$, ce qui démontre le théorème.

19. *Remarque.* — Le théorème qui précède peut s'énoncer ainsi :

*Les termes pris de $p+1$ en $p+1$ dans la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

*ont une somme constante, quel que soit celui des $p+1$ premiers termes par lequel on commence, et égale à la somme de tous les termes de la suite*

$$(m-1, 0)_p, \quad (m-1, 1)_p, \quad (m-1, 2)_p, \quad (m-1, 3)_p, \quad \ldots, \quad [m-1, (m-1)p]_p.$$

20. *Remarque.* — Ce même théorème du n° 18 pourrait se déduire de celui du n° 16, dont on peut le considérer comme un simple corollaire. Nous laissons au lecteur le soin de faire lui-même cette facile déduction.

21. Théorème. — *La somme des termes de la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

*vaut $p+1$ fois la somme des termes de la suite*

$$(m-1, 0)_p, \quad (m-1, 1)_p, \quad (m-1, 2)_p, \quad (m-1, 3)_p, \quad \ldots, \quad [m-1, (m-1)p]_p.$$

En effet, les termes dont les seconds indices, divisés par $p+1$, donnent un même reste $\alpha$, ont une somme égale à la somme des termes de la seconde suite. Or la première suite se compose de $p+1$ groupes de cette espèce, puisque $\alpha$ peut prendre les $p+1$ valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, p$;

donc on a, identiquement

$$\sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p = (p+1) \sum_{k=0}^{k=(m-1)p} (m-1, k)_p,$$

ce qui démontre le théorème.

22. Théorème. — *La somme des termes de la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

*est égale à*

$$(p+1)^m.$$

En effet, on a identiquement

$$\sum_{k=0}^{k=p} (1, k)_p = p+1;$$

on a aussi, d'après le théorème du n° 21,

$$\sum_{k=0}^{k=2p} (2, k)_p = (p+1) \sum_{k=0}^{k=p} (1, k)_p$$

$$\sum_{k=0}^{k=3p} (3, k)_p = (p+1) \sum_{k=0}^{k=2p} (2, k)_p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p = (p+1) \sum_{k=0}^{k=(m-1)0} (m-1, k)_p.$$

Multiplions ces égalités membres à membres et supprimons les facteurs communs; il vient

$$\sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p = (p+1)^m,$$

ce qu'il fallait démontrer.

23. Corollaire. — *Le nombre de toutes les combinaisons régulières d'ordre p de m lettres est*

$$(p+1)^m - 1.$$

En effet, si de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{k=mp}(m, k)_p = (p+1)^m$$

nous retranchons, membres à membres, l'égalité

$$(m, 0)_p = 1,$$

qui résulte de la convention du n° 7, nous trouvons

$$\sum_{k=1}^{k=mp}(m, k)_p = (p+1)^m - 1.$$

24. *Remarque.* — Les termes de la suite

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

peuvent se classer en $p+1$ groupes, comme on l'a vu au n° 18, d'après les restes que donnent les seconds indices divisés par $p+1$; chacun de ces groupes a donc une somme égale à

$$(p+1)^{m-1}.$$

Il en est de même pour les nombres des combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres, avec cette différence toutefois que le groupe où le second indice est multiple de $p+1$ a une somme moindre d'une unité, et par suite égale à

$$(p+1)^{m-1} - 1,$$

puisque ce groupe contient le terme

$$(m, 0)_p,$$

qui est égal à l'unité, d'après la convention du n° 7, et qui ne représente pas un nombre de combinaisons.

25. Théorème. — *Si l'on forme les combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres, en mettant dans chacune un nombre de lettres multiple de $p+1$, on obtient un nombre de combinaisons inférieur d'une unité au nombre de celles qu'on obtiendrait en mettant dan chaque combinaison un nombre de lettres égal à un multiple de $v+1$ plus un nombre quelconque, mais constant, différent de zéro et inferieur à $v+1$.*

Cela résulte immédiatement de la remarque précédente. C'est une généralisation curieuse et inattendue de ce théorème sur les combinaisons simples : que *le nombre des combinaisons simples de m lettres qui renferment un nombre pair de lettres est inférieur d'une unité au nombre de celles qui en renferment un nombre impair.*

### § VI. — *Nouvelle relation entre les combinaisons de m lettres et les combinaisons de m — 1 lettres.*

26. Théorème. — *On a identiquement*

$$\frac{n}{m}(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=p} k(m-1, n-k)_p.$$

En effet :

1° Chacune des combinaisons régulières d'ordre $p$ de $m$ lettres $n$ à $n$ contient $n$ lettres; le nombre total des lettres contenues dans ces combinaisons est par suite

$$n(m, n)_p,$$

et, comme toutes s'y trouvent le même nombre de fois, chacune d'elles, $a$ par exemple, y entre un nombre de fois donné par l'expression

$$\frac{n}{m}(m, n)_p.$$

2° Cette même lettre $a$ est donnée

$$1(m-1, n-1)_p$$

fois par celles des combinaisons considérées qui la contiennent une fois chacune;

$$2(m-1, n-2)_p$$

fois par celles qui la contiennent deux fois, et ainsi de suite; enfin

$$p(m-1, n-p)_p$$

fois par celles qui la contiennent $p$ fois. On a donc identiquement

$$\frac{n}{m}(m, n)_p = 1(m-1, n-1)_p + 2(m-1, n-2)_p + 3(m-1, n-3)_p + \ldots + p(m-1, n-p)_p,$$

ce qui démontre le théorème.

27. Corollaire. — *Si $m$ et $n$ sont premiers entre eux, le nombre*

$$(m, n)_p$$

*est divisible par $m$.*

En effet, dans l'égalité du n° 26, le second membre est entier; donc le premier l'est aussi, donc le produit

$$n(m, n)_p$$

est divisible par $m$; donc, si $m$ est premier avec $n$, il divise

$$(m, n)_p.$$

## § VII. — *Relation entre les nombres des différentes combinaisons d'ordre $p$ de $m$ lettres.*

28. Théorème. — *On a identiquement*

$$n(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (km + k - n)(m, n - k)_p.$$

En effet, le théorème du n° 11 nous donne

$$n(m + 1, n)_p = n \sum_{k=0}^{k=p} (m, n - k)_p;$$

le théorème du n° 26 nous donne, d'autre part,

$$n(m + 1, n)_p = (m + 1) \sum_{k=0}^{k=p} k(m, n - k)_p.$$

Retranchons membres à membres, il vient

$$0 = \sum_{k=0}^{k=p} (mk + k - n)(m, n - k)_p,$$

d'où nous tirons

$$0 = -n(m, n)_p + \sum_{k=1}^{k=p} (mk + k - n)(m, n - k)_p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

29. *Remarque.* — Cette formule nous présente cette particularité remarquable qu'un seul des indices, le second, n'y est point constant.

§ VIII. — *Relations non linéaires entre les nombres de combinaisons.*

30. Toutes les formules qui précèdent sont linéaires par rapport aux nombres de combinaisons. Celles que nous allons établir dans ce paragraphe et le suivant sont, au contraire, toutes du second degré par rapport à ces mêmes nombres.

31. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=m} (m, k)_1 (m-k, n-kp)_{p-1}.$$

Considérons, en effet, les combinaisons d'ordre $p$ de $m$ lettres $n$ à $n$. Il en est qui ne contiennent aucune lettre $p$ fois; leur nombre est

$$(m, n)_{p-1}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(m, 0)_1 (m, n)_{p-1}.$$

Celles qui ne contiennent qu'une seule lettre $p$ fois sont en nombre égal à

$$(m, 1)_1 (m-1, n-p)_{p-1}.$$

Celles qui contiennent deux lettres $p$ fois chacune sont en nombre égal à

$$(m, 2)_1 (m-2, n-2p)_{p-1},$$

et ainsi de suite. On a donc identiquement

$$(m, n)_p = (m, 0)_1 (m, n)_{p-1} + (m, 1)_1 (m-1, n-p)_{p-1} + (m, 2)_1 (m-2, n-2p)_{p-1} + \ldots,$$

ce qu'il fallait démontrer.

32. *Remarque.* — Bien que, dans l'identité précédente, nous ayons indiqué au $\Sigma$ que $k$ varie depuis zéro jusqu'à $m$, le second membre de cette identité n'a souvent qu'un nombre de termes inférieur à $m+1$.

D'après les conventions du n° 7, en effet, il se peut, à cause du second facteur, que les termes du développement deviennent tous nuls à partir d'une valeur de $k$ inférieure à $m$. L'identité n'en reste pas moins exacte.

La plupart de nos formules pourraient donner lieu à des remarques analogues.

33. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=m} (m, k)_1 (k, n-k)_{p-1}.$$

Considérons, en effet, les combinaisons d'ordre $p$ de $m$ lettres $n$ à $n$. Il en est qui ne contiennent qu'une seule lettre : leur nombre est

$$(m, 1)_1 (1, n-1)_{p-1};$$

celles qui en contiennent deux sont en nombre égal à

$$(m, 2)_1 (2, n-2)_{p-1},$$

et ainsi de suite.

Donc on a

$$(m, n)_p = (m, 1)_1 (1, n-1)_{p-1} + (m, 2)_1 (2, n-2)_{p-1} + \ldots,$$

ce qui démontre le théorème.

34. *Remarque.* — Dans l'identité

$$(m, n)_p = \sum_{k=1}^{k=m} (m, k)_1 (k, n-k)_{p-1},$$

le premier terme différent de zéro n'est pas d'ordinaire

$$(m, 1)_1 (1, n-1)_{p-1}:$$

c'est le terme

$$(m, x)_1 (x, n-x)_{p-1},$$

$x$ étant la partie entière du quotient de $n+p-1$ par $p$.

L'identité en question peut donc s'écrire

$$(m, n)_p = (m, x)_1 (x, n-x)_{p-1} + (m, x+1)_1 (x+1, n-x-1)_{p-1} + (m, x+2)_1 (x+2, n-x-2)_{p-1} + \ldots,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$(m, n)_p = (m, x)_1 \left[ (x, n-x)_{p-1} + \frac{m-x}{x+1}(x+1, n-x-1)_{p-1} \right.$$
$$\left. + \frac{(m-x)(m-x-1)}{(x+1)(x+2)}(x+2, n-x-2)_{p-1} + \ldots \right].$$

§ IX. — *Somme des carrés des nombres de combinaisons de m lettres.*

35. Théorème. — *On a identiquement*

$$(r+s, n)_p = \sum_{k=0}^{k=rp} (r, k)_p (s, n-k)_p.$$

En effet, partageons les $r+s$ lettres données, supposées forcément distinctes, en deux groupes dont l'un en contienne $r$ et l'autre $s$.

Les combinaisons régulières d'ordre $p$, de $r+s$ lettres, $n$ à $n$, qui ne renfermeront aucune lettre du premier groupe seront en nombre égal évidemment à

$$(r, 0)_p (s, n)_p.$$

Celles qui en renfermeront une du premier groupe seront en nombre

$$(r, 1)_p (s, n-1)_p.$$

Celles qui en renfermeront deux en nombre

$$(r, 2)_p (s, n-2)_p,$$

et ainsi de suite.

On a donc identiquement

$$(r+s, n)_p = (r, 0)_p (s, n)_p + (r, 1)_p (s, n-1)_p + (r, 2)_p (s, n-2)_p + \ldots,$$

ce qui démontre le théorème.

36. *Remarque.* — Si, dans cette dernière identité, on fait

$$r+s=m,$$
$$r=1$$

et par suite

$$s=m-1,$$

on retrouve l'identité

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

établie directement au n° 11.

37. Corollaire. — *On a identiquement*

$$(2m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p (m, n-k)_p.$$

Il suffit, pour obtenir cette formule, de remplacer par $m$, dans la formule du n° 35, chacune des lettres $r$ et $s$.

38. Lemme. — *On a identiquement*

$$(r+s, sp)_p = \sum_{k=0}^{k=rp} (r, k)_p (s, k)_p.$$

Pour obtenir cette formule, il suffit de prendre encore celle du n° 35 et d'y remplacer $n$ par $sp$, en remarquant que, dans ce cas,

$$(s, n-k)_p = (s, k)_p.$$

39. *Remarque.* — Cette dernière formule (n° 38), que nous venons de déduire de celle du n° 35, pourrait, sans difficulté, s'obtenir directement.

40. Théorème. — *La somme des carrés des termes de la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots, \quad (m, mp)_p$$

*est égale à*

$$(2m, mp)_p.$$

En effet, si, dans la formule du n° 38, nous faisons

$$r = s = m,$$

nous trouvons

$$(2m, mp)_p = \sum_{k=0}^{k=mp} (m, k)_p^2,$$

ce qui démontre le théorème.

41. *Remarque.* — On peut rapprocher ce dernier théorème et ceux qui le précèdent de la Note sur les combinaisons simples, que nous avons publiée, au mois de mai 1871, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (¹).

## CHAPITRE III.

### CALCUL DU NOMBRE DES COMBINAISONS RÉGULIÈRES.

#### § I. — *Calcul par voie récurrente.*

42. Théorème. — *Dans la suite*

$$(m,0)_p,\quad (m,1)_p,\quad (m,2)_p,\quad (m,3)_p,\quad \ldots,\quad (m,mp)_p,$$

*chaque terme est la somme des p précédents multipliés respectivement par des quantités connues.*

Revenons, en effet, à l'identité

$$(m,n)_p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p}(km+k-n)(m,n-k)_p,$$

qui constitue le théorème du n° 28. Cette identité donne précisément le terme

$$(m,n)_p$$

sous la forme indiquée dans le théorème ci-dessus, et par suite démontre ce théorème.

43. *Remarque.* — On voit que cette même identité (n° 42) donne le moyen de calculer de proche en proche, par voie récurrente, tous les termes de la suite considérée, pourvu qu'on connaisse les premiers. Or on sait (n° 7) que tous les termes à gauche de

$$(m,0)_p$$

(¹) 2e série, t. X, p. 221.

sont nuls; on sait, de plus, d'après la convention du n° 7, que

$$(m, 0)_p = 1;$$

et, d'après la remarque du n° 6, que

$$(m, 1)_p = m.$$

On peut donc facilement effectuer le calcul.

44. Théorème. — *Si l'on pose, pour abréger,*

$$(m, n-\alpha)_p = A_\alpha, \quad (n-\beta) - \gamma(m+1) = B_{\beta,\gamma},$$

*on a, identiquement,*

$$A_0 = (m, n)_p = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} & \ldots & B_{0,p} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \ldots & B_{1,p-1} & B_{1,p} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{2,0} & B_{2,1} & \ldots & B_{2,p-2} & B_{2,p-1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & B_{n-2,0} & B_{n-2,1} & B_{n-2,2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_{n-1,0} & B_{n-1,1} \end{vmatrix},$$

*le déterminant ci-dessus ayant précisément n lignes.*

Pour le démontrer, revenons encore à la formule du n° 28, que nous avons rappelée au n° 42. Si nous faisons usage des abréviations indiquées dans l'énoncé, elle nous donne les identités suivantes :

$$\begin{aligned} B_{0,0}A_0 + B_{0,1}A_1 + B_{0,2}A_2 + \ldots + B_{0,p}A_p &= 0, \\ B_{1,0}A_1 + B_{1,1}A_2 + B_{1,2}A_3 + \ldots + B_{1,p}A_{p+1} &= 0, \\ B_{2,0}A_2 + B_{2,1}A_3 + B_{2,2}A_4 + \ldots + B_{2,p}A_{p+2} &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, jusqu'aux deux identités

$$\begin{aligned} B_{n-2,0}A_{n-2} + B_{n-2,1}A_{n-1} + B_{n-2,2}A_n &= 0, \\ B_{n-1,0}A_{n-1} + B_{n-1,1}A_n &= 0. \end{aligned}$$

Ajoutons encore l'identité

$$A_n = 1.$$

Nous obtenons $n+1$ équations du premier degré entre $n+1$ inconnues, qui sont

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_n,$$

c'est-à-dire

$$(m, n)_p, \quad (m, n-1)_p, \quad (m, n-2)_p, \quad (m, n-3)_p, \quad \ldots, \quad (m, 0)_p.$$

Si nous résolvons ce système à l'aide des déterminants, de manière à obtenir l'expression de

$$(m, n)_p,$$

nous arrivons à la formule qui fait l'objet de ce théorème.

45. *Remarque.* — La formule du théorème précédent (n° 44) n'est qu'une conséquence de ce qui précède; car il est bien évident que le terme général d'une série, soit récurrente, soit analogue aux séries récurrentes, se peut toujours mettre sous la forme d'un déterminant. Elle exprime le nombre

$$(m, n)_p,$$

directement en fonction des quantités

$$B_{\beta,\gamma},$$

c'est-à-dire en fonction des quantités données. En théorie, elle présente donc un très-grand avantage sur la méthode du n° 43; mais, dans la pratique, cet avantage disparaît, pour ainsi dire, dès que $n$ est un peu grand, tant le déterminant que renferme la formule devient alors long à calculer.

46. *Applications.* — Quoi qu'il en soit, si nous appliquons au cas, par exemple, où $p$ égale 2, soit la méthode du n° 43, soit celle du n° 45, nous trouvons

$$(m, 0)_2 = 1,$$

$$(m, 1)_2 = \frac{m}{1},$$

$$(m, 2)_2 = \frac{m}{1}\,\frac{m+}{2},$$

$$(m, 3)_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{m+4}{3},$$

$$(m, 4)_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{m^2+7m-6}{3.4},$$

$$(m, 5)_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{m^2+13m+12}{4.5},$$

.....

47. *Remarque.* — On voit bien, sur les exemples qui précèdent, que le nombre

$$(m, x)_1,$$

$x$ étant la partie entière du quotient de $n+p-1$ par $p$, est facteur de l'expression

$$(m, n)_p.$$

Il en devait être ainsi d'après la remarque du n° 34.

## § II. — *Calcul symbolique.*

48. Lemme. — *Le nombre*

$$(m, n)_p$$

*est une fonction linéaire des nombres de combinaisons simples de m lettres.*

Supposons que ce soit vrai pour le nombre

$$(\alpha, n)_p,$$

tant que $\alpha$ ne dépasse pas $m-1$. Alors le nombre

$$(\alpha, n-k)_p$$

sera une fonction linéaire des expressions

$$C_\alpha^0, \quad C_\alpha^1, \quad C_\alpha^2, \quad C_\alpha^3, \quad \ldots,$$

et, par suite, l'expression

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p$$

sera la même fonction linéaire des expressions

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^0, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^1, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^2, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^3 \ldots$$

Or on sait que

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^t = C_m^{t+1};$$

donc

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p$$

est toujours la même fonction linéaire des quantités

$$C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad C_m^4, \quad \ldots.$$

Cela posé, l'identité qui constitue le théorème du n° 16 peut s'écrire ainsi :

$$(m, n)_p = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-1)_p + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-2)_p + \ldots + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-p)_p;$$

donc le nombre

$$(m, n)_p$$

est aussi une fonction linéaire des quantités

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots.$$

Or le théorème est vrai pour l'expression

$$(0, n)_p,$$

car on a, d'après la convention du n° 7,

$$(0, n)_p = (0, n)_1 = C_0^n.$$

Il est vrai aussi pour l'expression

$$(1, n)_p;$$

car on a, d'après la remarque du n° 6,

$$(1, n)_p = (1, n)_1 = C_1^n.$$

Donc le théorème est général.

49. Lemme. — *Si, dans les expressions*

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots,$$

*on assimile les indices supérieurs à des exposants, les inférieurs continuant à être regardés comme des indices, on a, symboliquement,*

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p = C_m (m, n-k)_p.$$

En effet, d'après le théorème précédent, le nombre

$$(m, n-k)_p$$

est une fonction linéaire des quantités

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots$$

Donc le nombre

$$(\alpha, n-k)_p$$

est la même fonction linéaire des quantités

$$C_\alpha^0, \quad C_\alpha^1, \quad C_\alpha^2, \quad C_\alpha^3, \quad \ldots;$$

et, par suite,

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-k)_p$$

est encore la même fonction linéaire des expressions

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^0, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^1, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^2, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} C_\alpha^3, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire, comme nous l'avons remarqué déjà dans le numéro précédent, des quantités

$$C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad C_m^4, \quad \ldots.$$

Or ces quantités ne sont autre chose que les termes de la suite

$$C_m^0, \quad C_m^1, \quad C_m^2, \quad C_m^3, \quad \ldots,$$

dont tous les indices supérieurs sont augmentés d'une unité. Donc le théorème est démontré.

50. Théorème. — *Dans la suite*

$$(m, 0)_p, \quad (m, 1)_p, \quad (m, 2)_p, \quad (m, 3)_p, \quad \ldots,$$

*chaque terme est égal à la somme des p précédents multipliés symboliquement chacun par le facteur*

$$C_m.$$

Pour le démontrer, revenons à l'identité du n° 16, que nous écrirons comme nous l'avons fait au n° 46 :

$$(m, n)_p = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-1)_p + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-2)_p + \ldots + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} (\alpha, n-p)_p;$$

puis remplaçons chacun des termes de son second membre par sa valeur tirée du théorème précédent (n° 47). Nous trouvons

$$(m, n)_p = C_m(m, n-1)_p + C_m(m, n-2)_p + \ldots + C_m(m, n-p)_p;$$

ce qui démontre le théorème.

51. *Remarque.* — Le théorème que nous venons d'établir nous donne le moyen de calculer de proche en proche, par voie récurrente, l'expression de

$$(m, n)_p$$

en fonction des nombres de combinaisons simples. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème précédent, en nous rappelant :

D'abord que tous les termes de la suite qui précéderaient

$$(m, 0)_p$$

sont identiquement nuls, d'après la convention du n° 7;

Ensuite que l'on a, d'après les n$^{os}$ 7 et 6,

$$(m, 0)_p = C_m^0,$$
$$(m, 1)_p = C_m^1.$$

52. *Remarque.* — Pour simplifier l'écriture, nous pouvons, dans les calculs relatifs à

$$(m, n)_p,$$

supprimer à la lettre C son indice inférieur $m$, sauf à le rétablir dans les résultats. Cette suppression ne créera aucune ambiguïté, puisque la lettre $m$ est la seule qui, dans ces calculs, serve d'indice inférieur à la lettre C.

53. Théorème. — *On a symboliquement*

$$(m, n)_p = \begin{vmatrix} C & C & C & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & C & C & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & C & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & C & C \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & C \end{vmatrix},$$

*ce déterminant présentant n lignes dont les premières contiennent, p fois chacune, la lettre* C.

En effet, le théorème du n° 51 nous donne les identités symboliques suivantes :

$$\begin{aligned} -(m, n)_p \quad + C(m, n-1)_p + C(m, n-2)_p + \dots + C(m, n-p)_p \quad &= 0, \\ -(m, n-1)_p + C(m, n-2)_p + C(m, n-3)_p + \dots + C(m, n-p-1)_p &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &, \\ -(m, 2)_p + C(m, 1)_p + C(m, 0)_p &= 0, \\ -\quad (m, 1)_p + C(m, 0)_p &= 0. \end{aligned}$$

Joignons-y l'identité

$$-(m, 0)_p = -1;$$

nous obtenons $n+1$ équations du premier degré à $n+1$ inconnues qui sont

$$(m, n)_p, \quad (m, n-1)_p, \quad (m, n-2)_p, \quad (m, n-3)_p, \quad \dots, \quad (m, 0)_p.$$

En résolvant ce système à l'aide des déterminants, nous en tirons, pour

$$(m, n)_p,$$

la formule qui fait l'objet du théorème actuel.

54. *Remarque.* — En développant le déterminant qui précède, on obtient une formule qui n'est plus symbolique et qui donne le nombre des combinaisons régulières d'ordre $p$, de $m$ lettres, $n$ à $n$, en fonction des nombres des combinaisons simples de $m$ lettres.

55. *Applications.* — Si nous appliquons les deux procédés donnés aux n$^{os}$ 51 et 54 au cas où $p$ égale 2, nous trouvons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_2 &= C_m^0, \\
(m, 1)_2 &= C_m^1, \\
(m, 2)_2 &= C_m^2 + C_m^1, \\
(m, 3)_2 &= C_m^3 + 2C_m^2, \\
(m, 4)_2 &= C_m^4 + 3C_m^3 + C_m^2, \\
(m, 5)_2 &= C_m^5 + 4C_m^4 + 3C_m^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En faisant la même application au cas où $p$ égale 3, nous trouvons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_3 &= C^m, \\
(m, 1)_3 &= C_m^1, \\
(m, 2)_3 &= C_m^2 + C_m^1, \\
(m, 3)_3 &= C_m^3 + 2C_m^2 + C_m^1, \\
(m, 4)_3 &= C_m^4 + 3C_m^3 + 3C_m^2, \\
(m, 5)_3 &= C_m^5 + 4C_m^4 + 6C_m^3 + C_m; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

56. *Remarque.* — Il résulte évidemment des calculs du n° 55 que les procédés de ce paragraphe sont beaucoup plus rapides que ceux du paragraphe précédent.

## § III. — *Nouvelle expression du nombre des combinaisons régulières.*

57. Lemme. — *Si l'on désigne par $C_m^n$ le nombre des combinaisons simples de $m$ lettres $n$ à $n$; par $K_m^n$ le nombre des combinaisons complètes de $m$ lettres $n$ à $n$; et par $U_\alpha$ le nombre de celles-ci où $\alpha$ lettres et $\alpha$ seulement entrent plus de $p$ fois chacune, on a identiquement*

$$C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} C_\alpha^\lambda U_\alpha.$$

Considérons, en effet, parmi les combinaisons complètes de $m$ objets $n$ à $n$, l'une de celles où $\lambda$ lettres, au moins, entrent chacune plus de $p$ fois. Celle-là se compose évidemment d'une combinaison complète de $m$ lettres, $n - \lambda(p+1)$ à $n - \lambda(p+1)$, unie à une combinaison simple de $m$ lettres, $\lambda$ à $\lambda$, dont chaque lettre est répétée $p+1$ fois. Associons, de toutes les manières possibles, une combinaison complète

de $m$ lettres, $n-\lambda(p+1)$ à $n-\lambda(p+1)$, avec une combinaison simple de $m$ lettres, $\lambda$ à $\lambda$, dont chaque lettre sera répétée $p+1$ fois; nous obtiendrons des combinaisons complètes de $m$ objets, $n$ à $n$, dans l'une quelconque desquelles $\lambda$ lettres, au moins, entreront plus de $p$ fois chacune, et le nombre de ces résultats sera

$$C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)}.$$

Mais tous ces résultats ne seront pas des combinaisons complètes distinctes de $m$ lettres, $n$ à $n$. En général, celles de ces combinaisons, en nombre $U_\alpha$, dans lesquelles $\alpha$ lettres et $\alpha$ seulement entrent plus de $p$ fois chacune, sont évidemment répétées un nombre de fois égal à $C_\alpha^\lambda$. Il en résulte qu'on a identiquement

$$C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} C_\alpha^\lambda U_\alpha;$$

ce qu'il fallait démontrer.

58. *Remarque.* — Nous avons, dans le $\Sigma$ du numéro précédent, pris $n$ pour limite supérieure de $\alpha$. Il est évident que cette limite est trop grande; mais cela n'a point d'inconvénient, puisque les termes qu'on obtiendrait en trop, en appliquant la formule telle quelle, seraient tous identiquement nuls.

59. Théorème. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)}.$$

En effet, d'après le lemme du n° 57, nous avons

$$C_m^0 K_m^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^0 U_k,$$

$$C_m^1 K_m^{n-(p+1)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^1 U_k;$$

$$C_m^2 K_m^{n-2(p+1)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^2 U_k,$$

et ainsi de suite.

Multiplions par $-1$ les deux membres de toutes les égalités de rang pair, puis ajoutons membre à membre. Au premier membre de l'équation résultante, nous trouvons

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda C_m^\lambda K_m^{n-\lambda(p+1)};$$

au second membre, la lettre $U_k$ se présente avec le coefficient

$$C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 + \ldots,$$

qui est, comme on sait, identiquement nul. Il en est ainsi pour toutes les valeurs de $k$ supérieures à zéro; donc le second membre se réduit à $U_0$, c'est-à-dire à

$$(m, n)_p,$$

ce qui démontre le théorème.

60. *Remarque.* — L'identité qu'on vient d'établir peut se transformer de plusieurs manières. Si nous remarquons, par exemple, qu'on a identiquement

$$K_m^{n-\lambda(p+1)} = C_{m+n-\lambda(p+1)-1}^{n-\lambda(p+1)} = C_{m+n-\lambda(p+1)-1}^{m-1},$$

nous pouvons l'écrire

$$(m, n)_p = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda C_m^\lambda C_{m+n-\lambda(p+1)-1}^{m-1}.$$

Cela peut encore s'écrire, en n'employant que les factorielles,

$$(m, n)_p = m \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \frac{[m+n-\lambda(p+1)-1]!}{\lambda!\,(m-\lambda)!\,[n-\lambda(p+1)]!}.$$

61. *Remarque.* — Dans les identités des n^os 59 et 60, la limite supérieure $n$ attribuée à $\lambda$ est généralement trop élevée; mais, par la raison que nous avons donnée dans la remarque du n° 58, il n'en résulte aucun inconvénient.

Nous pouvons toutefois donner la vraie limite : c'est la partie entière du quotient de $n$ par $p+1$.

Le nombre des termes formant le second membre de l'identité du

théorème précédent (n° 59) est donc égal à cette partie entière, augmentée d'une unité.

62. *Remarque.* — La formule du n° 59 permet d'écrire immédiatement l'expression du nombre

$$(m, n)_p$$

en fonction des nombres des combinaisons simples et des combinaisons complètes de $m$ lettres. N'exigeant aucun calcul préalable, elle nous semble préférable aux méthodes données précédemment.

63. *Applications.* — Calculons les valeurs successives de

$$(m, n)_p,$$

dans le cas où $p$ égale 2. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_2 &= C_m^0 K_m^0,\\
(m, 1)_2 &= C_m^0 K_m^1,\\
(m, 2)_2 &= C_m^0 K_m^2,\\
(m, 3)_2 &= C_m^0 K_m^3 - C_m^1 K_m^0,\\
(m, 4)_2 &= C_m^0 K_m^4 - C_m^1 K_m^1,\\
(m, 5)_2 &= C_m^0 K_m^5 - C_m^1 K_m^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour le cas où $p$ égale 3, nous avons

$$\begin{aligned}
(m, 0)_3 &= C_m^0 K_m^0,\\
(m, 1)_3 &= C_m^0 K_m^1,\\
(m, 2)_3 &= C_m^0 K_m^2,\\
(m, 3)_3 &= C_m^0 K_m^3,\\
(m, 4)_3 &= C_m^0 K_m^4 - C_m^1 K_m^0,\\
(m, 5)_3 &= C_m^0 K_m^5 - C_m^1 K_m^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

## § IV. — *Généralisation du triangle de Pascal.*

64. Théorème. — *Pour construire un triangle donnant les valeurs de*

$$(m, n)_p,$$

*correspondant à une valeur déterminée de $p$, il suffit d'écrire sur une pre-*

*mière ligne horizontale $p+1$ fois l'unité, et de calculer les termes des autres lignes par cette règle qu'un terme quelconque est égal au terme placé au-dessus de lui augmenté des $p$ termes qui précèdent celui-ci dans sa ligne horizontale.*

Ce théorème résulte immédiatement de la remarque faite au n° **12**, sur l'identité

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m-1, n-k)_p,$$

laquelle forme l'objet du théorème n° **11**.

65. *Remarque.* — Le triangle étant construit conformément à la règle qui précède, le nombre

$$(m, n)_p$$

n'est autre chose que le $(n+1)^{ième}$ terme de sa $m^{ième}$ ligne horizontale.

66. *Remarque.* — Il résulte évidemment de la règle que, pour le cas où $p$ est égal à l'unité, on retrouve le triangle de Pascal. Il en devait forcément être ainsi, puisque

$$(m, n)_1$$

n'est autre chose que le nombre des combinaisons simples de $m$ lettres, $n$ à $n$.

67. *Applications.* — Formons le triangle dans le cas où $p$ égale 2, nous trouvons

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | | | | | | |
| 1 | 3 | 6 | 7 | 6 | 3 | 1 | | | | |
| 1 | 4 | 10 | 16 | 19 | 16 | 10 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 15 | 30 | 45 | 51 | 45 | 30 | 15 | 5 | 1 |

. . . . . .

Pour le cas où $p$ égale 3, le triangle est celui-ci :

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 12 | 12 | 10 | 6 | 3 | 1 | | | | | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 31 | 40 | 44 | 40 | 31 | 20 | 10 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 65 | 101 | 135 | 155 | 155 | 135 | 101 | 65 | 35 | 15 | 5 | 1 |

68. *Remarque.* — Quand il s'agit d'arriver, non plus aux expressions générales, mais aux valeurs numériques des combinaisons régulières, ce procédé est de beaucoup le plus rapide, comme nous l'avons d'ailleurs fait remarquer dans l'Introduction.

## CHAPITRE IV.

### DÉVELOPPEMENT DE $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p)^m$.

#### § I. — *Nature des coefficients.*

69. Théorème. — *Le coefficient de $x^n$ dans le développement de*

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p)^m$$

*n'est autre chose que le nombre*

$$(m, n)_p.$$

En effet, considérons le produit

$$(1 + a_1 + a_1^2 + \ldots + a_1^p), (1 + a_2 + a_2^2 + \ldots + a_2^p)(1 + a_m + a_m^2 + \ldots + a_m^p).$$

Ceux de ses termes qui sont du degré $n$ s'obtiennent en prenant, de toutes les façons possibles, un terme dans chaque facteur, de telle sorte que la somme des exposants de tous les termes qu'on prend soit égale à $n$. Il en résulte évidemment que le nombre de ces termes n'est autre chose que celui des combinaisons régulières d'ordre $p$, de $m$ lettres, $n$ à $n$, c'est-à-dire n'est autre chose que le nombre

$$(m, n)_p.$$

Supposons maintenant que les $m$ lettres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ deviennent toutes égales à $x$, le produit considéré se réduit à

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^m;$$

tous les termes de degré $n$ du produit considéré deviennent égaux

chacun à $x^n$, et, comme leur nombre est

$$(m, n)_p,$$

$x^n$, dans le nouveau produit, admet ce même nombre pour coefficient, ce qu'il fallait démontrer.

70. Corollaire. — *On a identiquement*

$$(m, n)_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{nix}}\left[\frac{e^{(p+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1}\right]^m dx.$$

En effet, il suffit de regarder le second membre de cette égalité pour apercevoir qu'il représente simplement le coefficient de $x^n$ dans le développement qui nous occupe.

71. *Remarque.* — Nous avons fait remarquer, dans l'Introduction, que ce développement s'était présenté à Moivre à propos d'un problème sur le Calcul des probabilités. Ce problème est précisément celui dont nous avons donné l'énoncé au n° 4.

72. *Remarque.* — Les coefficients du développement considéré n'étant autres que les nombres des combinaisons régulières, ce qui précède en constitue une étude complète. Nous n'avons donc, pour faire connaître les propriétés et le mode de calcul de ces coefficients, qu'à reproduire les résultats déjà obtenus.

D'ailleurs nous avons dit, dans l'Introduction, que ces résultats se pouvaient déduire du développement lui-même.

## § II. — *Propriétés des coefficients.*

73. Théorème. — *Dans le développement considéré, les termes équidistants des extrêmes ont des coefficients égaux.*

C'est le corollaire du n° 9.

74. Théorème. — *Un coefficient quelconque du développement de la puissance $m^{ième}$ du polynôme*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^p$$

*est égal au coefficient de même rang dans le développement de la puis-*

*sance* $(m-1)^{ième}$ *du même polynôme plus les p coefficients placés à la gauche de celui-ci.*

C'est la remarque du n° 80.

75. Théorème. — *Les coefficients du carré du polynôme*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^p$$

*ne sont autre chose que les nombres* $1, 2, 3, \ldots, p$, *suivis du nombre* $p+1$, *lequel est suivi à son tour des p nombres* $p, p-1, p-2, \ldots, 3, 2, 1$.

C'est le corollaire du n° 13.

76. Théorème. — *Les coefficients du développement considéré*

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^m$$

*croissent jusqu'au milieu et décroissent au delà.*

C'est le théorème du n° 14.

77. Théorème. — *Si, dans le développement considéré, on prend les coefficients de* $p+1$ *en* $p+1$, *on obtient une somme constante, quel que soit celui des* $p+1$ *premiers coefficients par lequel on commence.*

C'est la remarque n° 19.

78. Théorème. — *La somme de tous les coefficients du développement est égale à*

$$(p+1)^m.$$

C'est le théorème n° 22.

79. Théorème. — *Si m et n sont premiers entre eux, le coefficient de* $x^n$ *dans le développement considéré est divisible par m.*

C'est le corollaire n° 27.

80. Théorème. — *La somme des carrés de tous les coefficients du développement considéré est égale au coefficient de* $x^{mp}$ *dans le développement de*

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^p)^{2m}.$$

C'est le théorème du n° 40.

### § III. — *Calcul des coefficients.*

81. Ce calcul n'étant autre chose que celui du nombre

$$(m, n)_p,$$

nous pouvons l'effectuer de quatre manières différentes :

1° Par voie récurrente, comme nous l'avons indiqué au n° 43, ou bien à l'aide du déterminant du n° 44;

2° Par voie récurrente encore, mais symboliquement, comme on l'a dit au n° 51, ou bien à l'aide du déterminant du n° 53;

3° A l'aide de la formule qui constitue le théorème du n° 59 ou des formules qu'on en a déduites au n° 60. La formule du n° 59 a été, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, trouvée par Moivre [1], qui l'a tirée algébriquement de la considération même du développement;

4° Enfin, à l'aide des triangles du n° 64. Ce dernier procédé, nous le répétons, est de beaucoup le meilleur : il fournit, par un seul calcul, les valeurs numériques de tous les coefficients de la puissance considérée et de tous ceux des puissances inférieures.

## CHAPITRE V.

### DU NOMBRE DES COMBINAISONS GÉNÉRALES.

### § I. — *Nature et importance du problème.*

82. Nous avons donné déjà, dans notre Introduction, la définition des combinaisons générales. En commençant ce Chapitre, nous la reproduisons, en modifiant toutefois, afin de faciliter les raisonnements, les notations déjà employées.

---

[1] *Miscellanea analytica*, p. 196.

*Les combinaisons générales, n à n, des m lettres distinctes*

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\alpha; \quad B_1, B_2, B_3, \ldots, B_\beta; \quad C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\gamma; \quad \ldots$$

*sont les groupes qu'on peut former en prenant n de ces lettres de toutes les manières possibles, avec ces conventions : que a, b, c, ..., désignant des nombres distincts, les lettres* A *puissent entrer dans un même groupe chacune jusqu'à a fois, les lettres* B *chacune jusqu'à b fois, les lettres* C *chacune jusqu'à c fois, ..., et que deux groupes, qui ne différeraient que par l'ordre des lettres, soient regardés comme identiques.*

83. Quel est le nombre de ces combinaisons? C'est le problème qu'il faudrait savoir résoudre pour répondre aux questions suivantes :

*Si l'on regarde comme du premier degré chaque facteur premier supérieur à l'unité, combien un nombre quelconque admet-il de diviseurs du degré n?*

*Combien un polynôme quelconque, entier en x et de degré m, admet-il de diviseurs du degré n?*

*De combien de manières peut-on obtenir la somme $n + m$ par le jet des m dés*

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\alpha; \quad B_1, B_2, B_3, \ldots, B_\beta; \quad C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\gamma; \quad \ldots,$$

*sachant que les dés* A *ont chacun $a + 1$ faces marquées* $1, 2, 3, \ldots, a + 1$; *les dés* B, *chacun $b + 1$ faces marquées* $1, 2, 3, \ldots, b + 1$; *les dés* C, *chacun $c + 1$ faces marquées* $1, 2, 3, \ldots, c + 1$; *et que les nombres a, b, c, ... sont tous différents?*

Pour peu qu'on y réfléchisse, on voit que c'est le nombre des combinaisons générales qui répond à chacune de ces questions.

## § II. — *Calcul du nombre des combinaisons générales.*

84. Il est évident que le nombre cherché n'est autre chose que le nombre des solutions de l'équation indéterminée à $m$ inconnues

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_\alpha + B_1 + B_2 + \ldots + B_\beta + C_1 + C_2 + \ldots + C_\gamma + \ldots = n,$$

dans laquelle les lettres A peuvent prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, a$; les lettres B, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, b$; les lettres C, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, c$; ...; les nombres $a, b, c, \ldots$ étant tous différents.

85. Il est un cas où le nombre des solutions de cette équation s'obtient immédiatement, c'est lorsqu'il n'y entre que des inconnues d'une seule espèce, que des lettres A par exemple. Dans ce cas, en effet, l'équation considérée se réduit à l'équation indéterminée donnée par nous au n° 3, et dont le nombre des solutions est égal au nombre des combinaisons régulières. Ce cas ne doit pas nous arrêter : c'est dans toute sa généralité que nous devons nous proposer de résoudre l'équation indéterminée du n° 84.

86. Le moyen le plus simple consiste à la ramener à d'autres, présentant un nombre moindre d'inconnues : c'est ce qu'on peut faire à l'aide du théorème que voici :

87. Théorème. — *Le nombre des solutions de l'équation indéterminée*

$$x + y + z + \ldots = n,$$

*où $x$ peut prendre les valeurs* 0, 1, 2, ..., $a$, *est la somme des nombres de solutions des $a + 1$ équations indéterminées*

$$\begin{aligned} y + z + \ldots &= n, \\ y + z + \ldots &= n - 1, \\ y + z + \ldots &= n - 2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y + z + \ldots &= n - a, \end{aligned}$$

*dans lesquelles $y$, $z$, ... peuvent prendre les mêmes valeurs que dans la proposée.*

Ce théorème, qui est fondamental, nous semble n'avoir pas besoin de démonstration.

88. *Remarque.* — A l'aide de ce théorème, on ramènera notre équation indéterminée du n° 84, laquelle présente $m$ inconnues, à d'autres n'en ayant plus chacune que $m - 1$; celles-ci à de nouvelles, n'en ayant plus que $m - 2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des équations à une inconnue admettant chacune une ou zéro solution.

89. *Remarque.* — Le procédé qui précède est simple, en théorie; mais, dans la pratique, lorsque le nombre des inconnues n'est pas très-

petit, il devient extrêmement long, et presque illusoire. Il est un cas, unique heureusement, où nous ne voyons nul moyen de le simplifier : c'est celui où il n'y a qu'une seule lettre A, qu'une seule lettre B, qu'une seule lettre C, en un mot qu'une seule lettre de chaque espèce. Mais, dans tous les autres cas, on peut, par la considération des combinaisons régulières, obtenir un mode de calcul notablement moins long.

## § III. — *Simplification du calcul.*

90. Théorème. — *Si l'on donne aux lettres* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, a, b, c, \ldots$ *leurs significations du n° 82, et que l'on désigne par* $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, \ldots$ *des indéterminées, pouvant prendre :* $n_\alpha$ *l'une quelconque des valeurs* $0, 1, 2, \ldots, \alpha a$; $n_\beta$ *l'une quelconque* des valeurs $0, 1, 2, \ldots, \beta b$; $n_\gamma$ *l'une quelconque des valeurs* $0, 1, 2, \ldots, \gamma c, \ldots$; *le nombre des combinaisons générales de m lettres, n à n, est donné par l'expression*

$$\sum (\alpha, n_\alpha)_a (\beta, n_\beta)_b (\gamma, n_\gamma)_c \ldots,$$

*le signe* $\sum$ *s'étendant à tous les termes qu'on obtient en remplaçant les indices* $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, \ldots$ *par les solutions de l'équation indéterminée*

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n.$$

En effet, considérons l'une quelconque des combinaisons générales; soient $n_\alpha$ le nombre des lettres A, $n_\beta$ le nombre des lettres B, $n_\gamma$ le nombre des lettre C, ... qu'elle renferme : on a évidemment

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n,$$

et il est clair que $n_\alpha$ est l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \alpha a$; $n_\beta$ l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots \beta b$; $n_\gamma$ l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \gamma c$; ....

Cela posé, les lettres A forment une combinaison régulière d'ordre $a$, de $\alpha$ lettres, $n_\alpha$ à $n_\alpha$; les lettres B, une combinaison régulière d'ordre $b$, de $\beta$ lettres, $n_\beta$ à $n_\beta$; de même pour les lettres C, et ainsi de suite. Si donc on prend toutes les combinaisons générales contenant $n_\alpha$ lettres A, $n_\beta$ lettres B, $n_\gamma$ lettres C, ..., c'est-à-dire toutes les combinaisons générales qui correspondent à une certaine solution de l'équation indéterminée de l'énoncé actuel, le nombre de ces combinaisons est égal au produit

$$(\alpha, n_\alpha)_a (\beta, n_\beta)_b (\gamma, n_\gamma)_c \ldots.$$

Le nombre total des combinaisons générales est donc la somme de tous les produits analogues, ce qui démontre le théorème.

91. *Règle.* — Ainsi, pour obtenir le nombre des combinaisons générales, il faut d'abord chercher les solutions de l'équation

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n;$$

ensuite calculer le produit correspondant à chacune d'elles, ce qui est facile d'après ce qui précède; enfin faire la somme de tous ces produits.

92. *Remarque.* — Le problème que nous étudions nous conduisait d'abord (n° 84) à résoudre l'équation indéterminée

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_\alpha + B_1 + B_2 + \ldots + B_\beta + C_1 + C_2 + \ldots + C_\gamma + \ldots = n.$$

Par la considération des combinaisons régulières, le théorème du n° 90 le réduit à la résolution de l'équation indéterminée

$$n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \ldots = n.$$

C'est, sauf dans le cas exceptionnel signalé plus haut (n° 89), une grande simplification, car la première de ces deux équations indéterminées renferme beaucoup plus d'inconnues que la seconde : dans celle-ci, en effet, ce nombre est égal à celui des espèces A, B, C, ... de lettres, et, dans celle-là, il est égal à celui des lettres elles-mêmes.

Supposons, par exemple, qu'on ait vingt-deux lettres distinctes, savoir: quatre lettres A, cinq lettres B, six lettres C, sept lettres D. La première méthode conduit à une équation indéterminée à vingt-deux inconnues; la méthode actuelle, à une équation indéterminée dont le nombre des inconnues est de quatre seulement.

93. *Remarque.* — Le théorème précédent (n° 90) est tout à fait général. Il s'applique parfaitement au cas où il n'y a qu'une lettre A, qu'une lettre B, qu'une lettre C, ..., c'est-à-dire au cas exceptionnel signalé plusieurs fois déjà; seulement, comme on l'a dit, il n'apporte alors aucune simplification à la première méthode, ce qui est évident, puisque, dans ce cas, les deux équations indéterminées deviennent identiques.

94. *Remarque.* — Si l'un des nombres $a$, $b$, $c$, ... devient égal à l'unité ou à $n$, le nombre des combinaisons régulières correspondant devient un nombre de combinaisons simples ou de combinaisons complètes. C'est, pour ce cas particulier, une nouvelle simplification.

95. *Remarque.* — Il est un cas remarquable où le $\Sigma$ du théorème du n° 90 se peut immédiatement développer : c'est celui où il n'y a que deux sortes de lettres, des lettres A, des lettres B. Si, dans ce cas, nous donnons aux lettres $m$, $n$, $\alpha$, $\beta$, $a$ et $b$ les mêmes significations que dans la définition du n° 82, le nombre des combinaisons générales de ces $m$ lettres, $n$ à $n$, est égal à l'expression

$$(\alpha, n)_a + (\alpha, n-1)_a(\beta, 1)_b + (\alpha, n-2)_a(\beta, 2)_b + \ldots + (\alpha, 1)_a(\beta, n-1)_b + (\beta, n)_b.$$

Cette formule, que nous tirons du théorème général du n° 90, pourrait d'ailleurs se démontrer directement.

96. *Remarque.* — Il se présente un cas tout à fait analogue dans le calcul des combinaisons générales de trois espèces de lettres : c'est lorsque, dans l'une de ces trois espèces, il n'existe qu'une lettre unique.

Supposons, en effet, qu'on nous donne une lettre unique A en même temps que $\beta$ lettres B et $\gamma$ lettres C; que la lettre A puisse être répétée jusqu'à $a$ fois, chaque lettre B jusqu'à $b$ fois, chaque lettre C jusqu'à $c$ fois, et qu'on nous demande le nombre des combinaisons générales ainsi déterminées de toutes ces lettres $n$ à $n$.

Pour obtenir ce nombre, la première chose à faire, d'après la règle précédente (91), sera de former toutes les solutions possibles de l'équation indéterminée

$$n_1 + n_\beta + n_\gamma = n,$$

dans laquelle $n_1$ peut prendre l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, 3,..., $a$; $n_\beta$ l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, 3,..., $\beta b$; $n_\gamma$ l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, 3,..., $\gamma c$.

A chacune des solutions obtenues correspond un produit de trois nombres de combinaisons régulières. La somme de tous ces produits donne, comme on l'a vu, le nombre des combinaisons générales cherché.

Mais, dans l'un quelconque de ces produits, le nombre de combinaisons régulières constituant le premier facteur est toujours égal à l'unité, car il est le nombre des combinaisons régulières d'une seule lettre. Il en résulte immédiatement que le produit considéré n'a plus, à proprement parler, pour facteurs que les deux derniers nombres de combinaisons régulières et qu'on est ramené aux combinaisons générales de deux espèces de lettres.

On pouvait, *a priori*, apercevoir cette simplification. Imaginons, en effet, qu'on ait formé toutes les combinaisons générales dont nous cherchons présentement le nombre. Celles qui ne contiennent pas A sont les combinaisons générales $n$ à $n$ des lettres B et des lettres C; celles qui contiennent une fois A deviennent, par la suppression de cette lettre, les combinaisons générales $n-1$ à $n-1$ des lettres B et des lettres C; celles qui contiennent deux fois A deviennent, par la suppression de ces deux A, les combinaisons générales $n-2$ à $n-2$ des lettres B et des lettres C, et ainsi de suite. En définitive, pour obtenir le nombre cherché, il suffit de considérer les lettres B et les lettres C; de calculer le nombre de leurs combinaisons générales $n$ à $n$, le nombre de leurs combinaisons générales $n-1$ à $n-1$, le nombre de leurs combinaisons générales $n-2$ à $n-2$,... et de faire la somme de tous ces nombres.

# LA THÉORIE ATOMIQUE

ET

# LA LOI DES PROPORTIONS MULTIPLES,

PAR M. H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

L'éclat de la lutte si courtoise qui s'établit au commencement de ce siècle entre deux grands chimistes, Berthollet et Proust, a tellement frappé l'esprit des hommes de ma génération qu'il semble encore aujourd'hui qu'ils y aient assisté. Les leçons de nos vénérés maîtres, M. Chevreul et M. Dumas, nous ont fait connaître cette brillante époque de la Science moderne avec de tels détails que l'établissement de la loi des proportions définies, de la loi de Proust, est considéré, par tous ceux qui enseignent la Chimie, comme un des meilleurs modèles à offrir à la jeunesse quand on veut lui apprendre la logique de la Science (1). La démonstration de la loi des équivalents n'est pas moins instructive, et, à ce sujet, je me permettrai d'indiquer aux professeurs la lecture d'un livre trop négligé aujourd'hui par leurs élèves, et qui, pourtant, au moins en ce qui concerne les principes fondamentaux de la Science, n'a pas encore vieilli, le grand ouvrage de Berzelius. Il est impossible, quand on est pénétré de l'importance de ses travaux, de ne pas lire avec émotion tout ce que Berzelius a écrit, dans son quatrième volume, sur les proportions chimiques. La modestie avec laquelle il présente sa découverte, la justice qu'il rend à ses devanciers et à ses contemporains, la crainte qu'il éprouve bien à tort de voir ses deux mille analyses, bases de sa théorie, critiquées par ceux qui modifieront ses

(1) Si, à cette époque, les chimistes avaient mieux connu les mémorables travaux de Wenzel, ils auraient vu que la loi des proportions définies en est une conséquence nécessaire.

méthodes, tout dans ce Chapitre peut être offert comme la meilleure leçon de moralité scientifique.

Je ne crois pas qu'on puisse éprouver la même impression quand on étudie dans l'histoire la découverte de la loi des proportions multiples. Pour abréger, je supposerai le lecteur au courant de ce qui en a été dit dans un livre classique, la *Philosophie chimique* de M. Dumas, où j'ai puisé l'idée du travail qui fait l'objet de cette première Communication, et je discuterai quelques-unes des bases sur lesquelles Dalton a appuyé le monument qui porte son nom. Voici ce que disait Berzelius en faisant l'historique des grandes découvertes du commencement de ce siècle et en parlant de l'ouvrage d'Higgins sur les atomes :

« Cependant Higgins lui-même parut attacher peu d'importance à cette hypothèse, dont il ne chercha à démontrer la vérité par aucune expérience analytique; il ne pressentit pas même les proportions multiples, qui en sont la conséquence nécessaire. »

C'est cette conséquence nécessaire qu'il reconnaît plus loin avoir été tirée par Dalton de l'hypothèse des atomes.

L'opinion de Berzelius a prévalu jusqu'à nos jours et on peut le constater en lisant dans le *Traité de Chimie moderne* (²) de M. Wurtz les lignes suivantes :

« Esprit élevé, Dalton ne s'arrêta pas aux faits, mais chercha à en rendre compte par une conception théorique. Reprenant l'idée de Leucippe et le mot d'Épicure, il supposa que la matière était formée de particules indivisibles qu'il nomma *atomes*....

» En effet, si la combinaison entre les corps résulte de la juxtaposition de leurs atomes, ceux-ci étant considérés comme indivisibles et comme possédant un poids invariable pour chaque espèce de matière, il est clair que les combinaisons ne peuvent s'effectuer qu'en des proportions définies, car les proportions définies représentent les rapports invariables entre les poids des atomes qui se juxtaposent. Si, d'un autre côté, un corps peut se combiner avec un autre en plusieurs proportions, de telles combinaisons ne peuvent s'effectuer que par la juxtaposition de 1, de 2, de 3, de 4, ... atomes de l'un des corps à un ou plusieurs

(¹) *Traité de Chimie*, t. I, p. 492; 1847.
(²) Masson et fils; Paris, 1867.

atomes de l'autre. Il en résulte évidemment que, le poids de ce dernier étant constant, les poids de l'autre, dans les diverses combinaisons, doivent être multiples l'un de l'autre. »

Ainsi l'atome est une portion indivisible de la matière, il est insécable et défini par cette propriété elle-même et par cette propriété seule. La loi des proportions définies, la loi des proportions multiples peuvent-elles en résulter *nécessairement*, comme le dit Berzelius, ou *évidemment*, comme le dit M. Wurtz? Non. Il y a là, à mon sens, une faute de logique importante, faute contre laquelle je prémunis mes élèves depuis bien des années et sur laquelle j'appelle avec instance l'attention des professeurs.

De ce que l'atome est insécable, il en résulte *seulement* que les combinaisons ne peuvent s'effectuer qu'entre des nombres *entiers* d'atomes. Ainsi le protoxyde de fer peut être formé de 999 atomes de fer et de 1000 atomes d'oxygène, et l'atome restera insécable : par conséquent l'hypothèse sera respectée; mais la loi des proportions définies ne résultera plus de cette hypothèse ou, ce qui revient au même, elle ne pourra plus être démontrée par l'expérience, et l'analyse deviendra impuissante pour la confirmer.

De même le sesquioxyde de fer, tout en restant fidèle à l'hypothèse des atomes, peut être supposé contenir deux fois 1000 atomes de fer et trois fois 998 (¹) atomes d'oxygène; mais la loi des proportions multiples ne sera plus vraie ou, ce qui revient au même, échappera à toute démonstration.

En tout cas elle ne sera pas la conséquence *nécessaire* ou *évidente* de l'hypothèse des atomes. Ainsi, je le répète, il résulte *seulement* de l'hypothèse des atomes que les combinaisons ne pourront s'effectuer qu'en nombres entiers d'atomes, et ces nombres pourront être aussi compliqués qu'on voudra. Il en résulte que la loi des proportions multiples ne peut être établie que par des analyses sévèrement contrôlées et des déterminations aussi exactes que celles dont on se sert pour fixer les équivalents des corps simples.

M. Dumas a écrit, avec raison, dans sa *Philosophie chimique* (p. 233), les lignes suivantes :

---

(¹) Ou tout autre nombre entier et voisin de celui-ci.

« La facilité avec laquelle tous les phénomènes de l'analyse quantitative ont été expliqués ou prévus, en partant du principe de l'existence des atomes, a fait adopter généralement les vues de Dalton; mais la base même de ces vues n'a point été démontrée. Quelques personnes ont voulu, il est vrai, présenter les phénomènes chimiques comme offrant, à leur tour, une démonstration de la réalité des atomes. C'était faire un cercle vicieux, et leur argumentation est restée sans autorité. »

Dalton lui-même n'a pas fait ce cercle vicieux, mais il a tiré de son principe une conclusion qui ne s'y trouve pas.

Il aurait dû admettre deux axiomes ou hypothèses :

1° Les corps sont composés d'atomes ou particules insécables;

2° Les combinaisons s'effectuent entre des atomes associés en nombres simples (entiers et petits). C'est de ces deux hypothèses que résulte seulement la loi des proportions multiples.

C'était, en effet, la conviction de Dalton que les rapports entre les nombres d'atomes dans une combinaison ne pouvaient être exprimés que par les nombres 1, 2, 3, 4. Il a bien mis des points à la suite du nombre 4 dans sa *Philosophie chimique;* mais, si l'on examine attentivement les figures au moyen desquelles il indiquait alors, comme on le fait aujourd'hui, la disposition des atomes, on voit qu'il ne dépasse jamais ce nombre 4.

C'est aussi cette opinion erronée qui lui a valu, de la part de Berzelius, un reproche bien grave. Berzelius écrit, en effet, à la page 493 du 4e volume de son *Traité de Chimie :*

« Dalton suppose que les atomes élémentaires se combinent de préférence un à un, et toutes les fois que nous ne connaissons qu'une seule combinaison de deux substances il la considère comme composée d'un atome de chacune; y en a-t-il plusieurs, il considère la première comme composée, par exemple, de A + B, la seconde de A + 2B, la troisième de A + 3B, etc. Dans son *Nouveau système de Chimie*, Dalton examine les corps oxydés, et il indique le nombre d'atomes qu'il suppose y être contenus. Il paraît cependant que, dans ce travail, ce savant distingué s'est trop peu appuyé sur l'expérience, et peut-être n'a-t-il pas agi avec assez de discernement en appliquant la nouvelle hypothèse au système de la Chimie. Il m'a semblé que, dans le petit nombre d'analyses qu'il a publiées, on pouvait quelquefois s'apercevoir du désir de l'opérateur

d'obtenir un résultat préconçu, ce dont on ne peut trop se garder lorsqu'on cherche des preuves pour ou contre une théorie dont on est préoccupé. »

Et cependant Berzelius ne pouvait être accusé d'obéir à un sentiment malveillant au sujet de Dalton. C'est à Berzelius que Dalton doit l'honneur d'avoir son nom attaché à la loi des proportions multiples. Cette loi aurait pu être et peut être avec quelque justice attribuée à Wollaston. C'est, en effet, dans l'analyse des divers oxalates de potasse que l'on trouve la première preuve incontestable de la réalité des proportions multiples. Berzelius, persuadé que la loi de Dalton est la conséquence nécessaire de l'hypothèse des atomes, mentionne un peu brièvement le travail de Wollaston; mais M. Dumas, dans sa *Philosophie chimique*, lui rend complétement justice.

Les notions vagues, incomplètes et toujours appuyées sur des expériences inexactes que Dalton a souvent introduites dans la Science trouvent la preuve de leur imperfection même dans les termes dont il s'est servi.

Ainsi le mot *proportion*, qui, en Arithmétique, exprime l'égalité de deux fractions et par conséquent l'intervention de quatre termes, aurait dû être remplacé par le mot *rapport*, qui indique la comparaison par quotient de deux nombres seulement. Ainsi le rapport $\frac{1}{2}$, qui exprime les quantités d'oxygène contenues dans le protoxyde d'azote et dans le bioxyde d'azote, est seul à considérer quand on établit les relations qui existent entre les quantités d'oxgène combinées avec une même quantité d'azote, pour constater que la loi que l'on veut établir est réellement applicable à ces deux espèces.

De même le mot *multiple* est très-mal choisi. C'est un qualificatif qui ne peut se séparer des termes que l'on veut comparer. Ainsi l'on ne peut dire *un nombre multiple* tout court, on doit dire *un nombre multiple d'un autre* par un troisième, et le troisième nombre est le résultat de la comparaison des deux premiers entre eux. A plus forte raison ne peut-on dire un *rapport multiple* et encore moins une *proportion multiple*. Ce qu'a voulu dire Dalton s'exprime seulement par le mot *simple*, un rapport simple exprimant le quotient d'une fraction réduite à sa plus simple expression et dont les deux termes sont des nombres entiers et

petits. Sa loi aurait dû s'appeler la *loi des rapports simples*. Ainsi exprimée, on aurait vu de suite qu'elle n'était pas la conséquence nécessaire de l'hypothèse des atomes ou des particules insécables.

Que devient aujourd'hui cette hypothèse des atomes devant la complication des formules ou des rapports de composition des éléments dans les corps organisés, organiques, etc.? Certainement Dalton aurait hésité à énoncer sa loi s'il avait su qu'elle devait s'appliquer un jour en termes si nombreux et si complexes, et il ferait aux chimistes de notre époque la même objection qu'il faisait à Gay-Lussac lorsqu'il refusait d'admettre la loi des volumes, qui est la seule base sérieuse de la théorie atomique. Peut-être aurait-il préféré l'hypothèse de Kant, celle qui se prête le mieux, il me semble, aux progrès considérables que la Mécanique de la chaleur a fait faire à nos conceptions relatives à la matière en Physique et en Chimie. Ce sera le sujet d'une prochaine discussion.

# APERÇU GÉOLOGIQUE

# SUR L'ILE DE COS,

PAR M. GORCEIX,

ANCIEN MEMBRE DE L'ÉCOLE FRANÇAISE D'ATHÈNES.

L'île de Cos, sur laquelle j'ai déjà appelé l'attention dans une Communication faite à l'Académie des Sciences et dans une lettre adressée à M. Delesse, présente, au point de vue géologique, un intérêt tout particulier. Elle renferme, en effet, dans une petite étendue, une série de roches volcaniques, de terrains métamorphiques et surtout de formations tertiaires dont les horizons géologiques, étant déterminés, peuvent servir de point de comparaison pour l'étude de la côte voisine d'Asie Mineure et de certaines des Sporades, dont deux surtout, Chio et Rhodes, ont avec elle une grande analogie de constitution. Des circonstances particulières ne me permettant pas de consacrer maintenant à ce sujet le temps nécessaire pour le traiter avec tous les détails qu'il mérite, je me contenterai ici de résumer les documents recueillis pendant les excursions que j'ai faites dans cette île aux mois de mars et décembre de l'année 1873.

M. Tournouër a bien voulu s'occuper de l'étude des fossiles récoltés par moi pendant ces voyages; je le prie de vouloir bien agréer mes sincères remercîments pour son concours si obligeant et si éclairé (1).

L'île de Cos (*Pl. I*) est comprise entre 36° 40′ et 36° 55′ de longitude et 24° 33′ et 25° 23′ de latitude; un canal très-étroit la sépare de la presqu'île de Boudroum, où un simple coup d'œil suffit pour faire reconnaître, de part et d'autre du canal, l'existence des mêmes roches et de terrains de même nature. Sa forme est celle d'une langue étroite n'ayant pas plus de 8 kilomètres dans sa plus grande largeur. Les

(1) Le travail de M. Tournouër sera publié dans ce même volume.

deux extrémités, où se trouvent les points culminants de l'île, sont reliées par un isthme peu élevé au-dessus du niveau de la mer; la partie ouest, beaucoup moins considérable que l'autre, figure comme la tête de l'île, forme qu'on retrouve indiquée dans le nom de *Képhalos* appliqué au village qu'on y rencontre et à un petit cap qui la termine.

### *Formations secondaires métamorphiques* (1).

Les formations secondaires métamorphiques constituent, dans les deux parties est et ouest, comme les noyaux autour desquels sont venus se grouper les dépôts tertiaires; mais elles jouent, surtout dans la région de Képhalos, un rôle bien moins important que celui qui leur est attribué sur la carte géologique de l'Asie Mineure qui accompagne l'ouvrage du comte de Tchihatcheff.

Autour du village de Képhalos, elles sont simplement représentées par un massif de calcaire cristallin, sans fossiles, formant en partie le mont Zéni, et par quelques lambeaux de ce même calcaire qui, à 1 kilomètre au nord du village, servent de points de départ aux deux principaux ravins descendant vers la mer.

Dans la partie orientale, les calcaires cristallins et les schistes qui les

---

(1) M. Gorceix, informé qu'un géologue autrichien, M. Neumayr (*Verhandlungen der k. k. geol. Reichsanstalt;* Wien, 1875), ne considérait pas les *calcaires métamorphiques* de Cos comme étant *secondaires,* donne à ce sujet les explications suivantes dans une lettre en date du 8 février 1876, adressée à M. Delesse :

« Selon l'usage, j'ai rapporté à l'époque secondaire la série des calcaires métamorphiques qui sont intermédiaires entre les marbres proprement dits et les calcaires non modifiés, à rudistes, qui ont été étudiés dans l'Attique et dans la Béotie.

» Cette formation, très-abondante dans la Grèce, dans certaines îles des Cyclades et des Sporades, se retrouve encore en Thessalie. Aucun fossile n'ayant jusqu'à présent été découvert dans cette grande série calcaire, l'horizon géologique auquel elle appartient est loin d'être fixé d'une manière positive.

» Outre ces calcaires cristallins, il en existe d'autres en Orient qui sont intercalés dans des micaschistes passant quelquefois au gneiss, comme je l'ai observé à Andros, et qui sont d'un âge plus ancien. Les calcaires métamorphiques de Cos doivent-ils être tous placés dans cette dernière catégorie? Je ne le crois pas. Sur le versant oriental de l'île on trouve, il est vrai, des calcaires subordonnés à des schistes argileux; mais ces roches ont été bouleversées par des éruptions trachytiques, traversées par des eaux minérales et soumises à des actions métamorphiques dont les effets se font encore sentir, et il ne m'a pas paru que, par cela seul que ces calcaires sont sous des schistes, il y eût une raison suffisante pour reculer leur âge au delà de l'époque secondaire.

accompagnent ont plus d'étendue; ils forment une chaîne continue courant à peu près de l'est 20 degrés nord vers l'ouest 30 degrés sud, du cap Foukas jusqu'au village de Pylli, leurs extrémités étant jalonnées par les monts Piperia et du prophète Elias qui forment les deux pics les plus élevés de cette petite chaîne. Coupées presque partout à pic du côté sud et ne laissant aucune plage entre elles et la mer, ces roches forment au nord une série de collines, à pentes rapides, d'où partent de nombreux ravins descendant à la mer à travers les dépôts tertiaires. Ces derniers terrains constituent la plus grande partie de ce versant, séparé du vallon de Pylli par un petit chaînon de calcaire cristallin qui arrive presque jusqu'à la plage.

Les calcaires cristallins sont brisés et disloqués; leur *facies* est le même que celui de la plupart des roches calcaires métamorphiques qui, en Grèce et dans certaines parties de la Turquie, forment la partie supérieure d'un grand nombre de chaînes de montagnes. Les couches sont en général relevées de 45 degrés vers le sud-est; mais, en outre, il existe d'autres dislocations, dues à des épanchements de roches volcaniques, dont l'apparition est postérieure au soulèvement principal. Les schistes ont été surtout profondément altérés, soit par les roches volcaniques elles-mêmes, soit sous l'influence des agents gazeux et liquides qui ont accompagné les éruptions et dont l'action se continue de nos jours.

Les schistes devenus fissiles, ardoisiers, au contact des trachytes, ont subi ensuite une altération plus profonde sous l'action de l'acide sulfurique provenant de la combustion de l'hydrogène sulfuré qui existe en quantité considérable dans les émanations gazeuses qu'on rencontre fréquemment dans l'île. Les roches volcaniques elles-mêmes sont profondément altérées et les eaux de pluie entraînent des proportions considérables de sulfate d'alumine et de soude qui rendent impotables toutes les eaux d'une partie de ce versant.

De minces couches de calcaire intercalées dans les schistes ont été transformées en sulfate de chaux qui a pu cristalliser et qui forme de petits dépôts de gypse au milieu des argiles.

A ces agents on doit joindre les eaux minérales de Kokkina-néra et celles du bord de la mer, au pied des monts Piperia et du prophète Elias. Les premières sont froides, ferrugineuses et laissent déposer un travertin formant des couches épaisses autour de leur point de dégagement;

les secondes, moins incrustantes et à peine ferrugineuses, sont surtout riches en chlorure de sodium, et leur température était de 52 degrés au mois de décembre, bien qu'elles fussent mélangées d'une quantité notable d'eau de pluie.

*Roches volcaniques.*

Les roches volcaniques ont une importance plus grande que les calcaires et les schistes dont nous venons de parler.

Leur apparition est postérieure à toutes les formations tertiaires de l'île, mais peut être rapportée à deux époques différentes. A la première, la plus ancienne, appartiendraient les trachytes compactes ou terreux qui, associés aux roches précédentes, forment la chaîne des monts Piperia et du prophète Elias, où elles se montrent tantôt en nappes, au milieu des feuillets des schistes, tantôt en amas qui ont traversé toutes les couches calcaires et constituent un pic qui, près du mont Elias, dépasse 700 mètres de hauteur.

Les éléments minéralogiques de ces trachytes sont rarement visibles à l'œil nu, et l'étude microscopique de quelques-uns montre combien ils ont été altérés. Auprès de l'église Saint-Georges un amas renferme des cristaux très-volumineux de feldspath orthose; autour du point de dégagement des eaux minérales de Kokkina-néra, ils contiennent des noyaux amygdalaires de carbonate de chaux. A cette même formation se rapporteraient quelques amas de trachytes que l'on rencontre auprès de l'ancienne solfatare de Képhalos; mais en général, dans cette région, les roches volcaniques appartiennent à une époque plus récente et contemporaine de la grande éruption à laquelle est due la formation de l'île de Nisyros et de quelques îlots voisins. Leur aspect est tout à fait différent des trachytes de la chaîne principale, leur altération est beaucoup moins grande et elles ont la plus grande ressemblance avec certaines roches de Hyali ou de Nisyros. Ce sont ou des obsidiennes ou des laves se rapprochant de la ponce; certaines d'entre elles sont formées par des fragments de véritable obsidienne, réunis à de gros nodules sphéroïdaux de perlite.

Le mode de gisement de ces roches est aussi caractéristique; elles ont formé plusieurs cônes tronqués à pentes rapides dont le sommet est occupé par de petits plateaux sans dépression sensible; sur le flanc

ouest de l'un d'eux, aux trois quarts de sa hauteur, on retrouve encore un véritable cratère de 300 mètres de diamètre, dont les abords, au nord, au sud et à l'est, ont près de 100 mètres d'altitude, présentant à l'ouest une échancrure par où les laves ont pu s'épancher sans pourtant former des coulées considérables; elles ont rencontré des marnes tertiaires d'eau douce qu'elles ont soulevées et brisées, mais leur action métamorphique a eu peu d'énergie et a cessé à une faible distance du point de contact. Ces éruptions ont été accompagnées de projections de blocs de lave qu'on retrouve disséminés sur la surface du sol tout autour des centres éruptifs, et, si des émanations gazeuses se sont montrées pendant leur cours, elles n'ont eu qu'une très-courte durée, car on ne trouve nulle part trace des altérations produites par de semblables dégagements. A la première période éruptive se rattacherait l'apparition des trachytes de Boudroum et probablement celle d'un grand nombre de roches de même nature que l'on rencontre fréquemment dans les provinces voisines de l'Asie Mineure.

La seconde période aurait été close par l'éruption de Nisyros, île dont l'apparition serait plus récente que celle de Cos; c'est d'ailleurs confirmé par une légende, d'après laquelle les auteurs anciens attribuent sa formation à un bloc de rocher détaché de Cos et sous lequel Posidon écrasa le géant Polybathis.

### *Formations tertiaires.*

Les terrains tertiaires, lacustres et marins, s'étendent du bord de la mer jusqu'aux roches secondaires et volcaniques sur lesquelles ils s'appuient, atteignant des hauteurs de 300 à 400 mètres. Ils occupent trois bassins communiquant entre eux et ne représentant plus qu'une faible partie de leur étendue avant les derniers bouleversements qui ont séparé Cos du continent asiatique. A l'ouest et sur l'isthme, entre Antimaki et Képhalos, ce groupe de terrains est partout recouvert d'une couche épaisse de conglomérats ponceux en lits horizontaux souvent fortement cimentés et contenant à la surface de gros blocs de lave; mais de nombreux ravins, qui traversent toutes les formations, en facilitent l'étude et permettent de suivre partout les couches repérées. Du village de Pylli à la ville de Khora, capitale de Cos, les parties basses sont cachées sous des cultures et des conglomérats modernes, les

affleurements auprès des roches secondaires sont seuls visibles. De Khora au cap Foukas, elles sont au contraire partout à découvert et conservent un *facies* uniforme. Auprès de ce cap, elles sont en relation avec des tufs volcaniques plus anciens que les conglomérats ponceux horizontaux et correspondant à la première période éruptive.

*Détermination de l'âge de ces terrains.* — La détermination de l'âge de ces terrains peut seulement être faite, d'une manière satisfaisante, à l'aide de l'étude des fossiles, et cette détermination présente, pour les terrains lacustres, une difficulté provenant de la dissemblance existant entre la faune de Cos et celles étudiées en Orient, auxquelles il serait plus rationnel de la comparer.

Dans toutes mes excursions en Grèce et en Turquie, c'est seulement dans l'île d'Eubée que j'ai rencontré quelques petits bassins d'eau douce, me semblant, à première vue, présenter quelques analogies avec les formations lacustres de Cos. Ces bassins, que je désignerai sous les noms de *Limni* et de *Messionda*, appartiendraient tout au plus au même horizon géologique que ceux de Koumi et d'Oropos, considérés comme certainement miocéniques, ce qui donnerait pour les formations de Cos une première limite inférieure; en outre, d'après l'étude des fossiles, M. Tournouër trouve une incontestable ressemblance entre la faune lacustre de Cos et celle de quelques dépôts d'eau douce du bassin du Danube, particulièrement de la Croatie et de l'Esclavonie, placés entre le miocène et le pliocène. Guidé par ces considérations, je désignerai par *infra-pliocéniques* les dépôts lacustres de Cos, acceptant d'avance les changements que l'étude plus complète des régions voisines pourrait apporter dans cette dénomination.

*Dépôts lacustres infra-pliocéniques.* — Le bassin le plus important s'étend du cap Foukas jusqu'au village de Pylli, en contournant la base des monts Piperia et Érémitti; ce sont des formations qui dessinent un premier étage de collines au-dessous de la chaîne principale. Dans la partie orientale du cap Foukas à la pointe de Louro, la roche dominante est un calcaire marneux très-friable, bourré de Paludines et de Mélanopsides. Ces calcaires sont recouverts, comme l'indique la coupe I (*Pl. II*), par des sables micacés où je n'ai pas rencontré de fossiles; en s'enfonçant plus au sud dans l'intérieur des terres, les sables deviennent argileux et riches en fossiles.

En revenant vers Khora, on peut suivre les points de contact des formations lacustres et des roches secondaires, les calcaires marneux contenant toujours des quantités énormes de Paludines. Dans un ravin profond, dirigé de l'est à l'ouest, on voit la superposition des couches suivantes, en allant de haut en bas :

Calcaires marneux en couches puissantes avec les fossiles déjà indiqués (Paludines);

Argiles marneuses noirâtres avec Néritines et Mélanopsides.

Une couche d'argile plastique et traces de lignite.

De Khora à la pointe de calcaire cristallin qui sépare le vallon de Pylli de la gorge d'Askendio, la base des collines formées par ces terrains dessine une ligne polygonale irrégulière, interrompue par les points où débouchent, au milieu des conglomérats modernes, les torrents qui y ont creusé leurs lits.

A des hauteurs variant de 200 à 300 mètres, on voit affleurer des marnes blanches, très-fertiles, qui limitent la partie supérieure de la formation.

Non loin de l'église de Saint-Georges, à 2 kilomètres environ au sud-est de la ville de Khora, on relève la coupe suivante :

Marnes à Limnées avec traces de végétaux renfermant quelques couches de calcaire dur avec moules de petits Mytilus;

Marnes argileuses avec petites veines de lignite;

Sables grossiers.

Les couches, surtout au voisinage des trachytes qui se montrent dans cette région, sont fortement relevées vers le sud quelques degrés est.

Les marnes, dans toute la partie qui s'étend de Vorina à Askendio, conservent le même aspect et ont une odeur bitumineuse très-prononcée.

*Bassin lacustre de Képhalos.* — Les formations lacustres du bassin de Képhalos sont beaucoup moins importantes et plus difficiles à étudier par suite de la puissance du conglomérat ponceux et des débris volcaniques qui les recouvrent. On les voit apparaître à l'ouest du village de Képhalos, au fond du ravin, à très-peu de distance du rivage de la mer.

Les couches, relevées de près de 45 degrés vers le nord-ouest, sont composées de calcaire compacte dur, recouvrant des marnes à odeur bi-

tumineuse avec Planorbes et Limnées et renfermant quelques bancs de calcaire. La base de la formation est occupée encore ici par quelques lits peu importants d'argile. En suivant le bord de la mer, en plusieurs points où le conglomérat a été enlevé, on voit affleurer les marnes et calcaires marneux, qui prennent une plus grande importance au pied des cônes volcaniques du monastère d'Hagios Joannis.

C'est dans cette même formation que je placerai les couches que l'on rencontre en suivant le sentier qui conduit de ce monastère au village de Képhalos. Aux environs du mont Zéni, elles atteignent une certaine puissance et prennent un aspect métamorphique plus prononcé. Les fossiles, comme dans les autres parties du bassin, y sont très-rares; mais, à leur défaut, les caractères de stratigraphie, leur nature et la continuité des couches me semblent suffisants pour les faire placer au même niveau géologique que les formations observées près du rivage de la mer.

*Formations pliocéniques marines.* — Ces formations occupent, depuis le village de Pylli jusqu'à celui de Képhalos, l'isthme qui réunit les deux parties orientale et occidentale de l'île et le plateau du village d'Antimaki.

Vers la partie supérieure on trouve une couche argilo-sableuse, contenant une quantité considérable de coquilles d'huîtres (*Ostrea lamellosa?*); elle s'étend dans tout le bassin, dans lequel elle forme un horizon facile à repérer.

La situation des diverses couches desquelles nous parlons au-dessus des dépôts infra-pliocéniques, leur stratification presque horizontale, la nature de leurs fossiles qui ont une grande ressemblance avec les espèces pliocéniques de la Morée, sont des caractères suffisants pour les placer dans le même étage, sauf à déterminer, par une étude plus complète, le niveau exact qu'elles doivent y occuper.

Je prendrai pour premier exemple de la série des couches de cette formation celles indiquées dans la coupe II (*Pl. II*) d'une colline à peu de distance du village de Cardamina, situé à une heure et demie au sud d'Antimaki. Au haut de la colline, on trouve d'abord un poudingue formé de ponce et de lave; au-dessus viennent des sables blanchâtres micacés, qui passent au poudingue supérieur et contiennent, au milieu d'eux, des fragments de ponces, qui semblent devoir les faire placer dans un mince groupe post-pliocénique; ensuite on rencontre un con-

glomérat ou poudingue, représentant la couche supérieure à huîtres, puis une série de marnes argileuses et de calcaires marneux très-riches en fossiles, recouvrant des sables agglutinés prenant l'aspect de grès.

En remontant de ce point vers Antimaki, les marnes deviennent plus argileuses, tout en restant très-fossilifères. Non loin de l'ancien château-fort d'Antimaki, au fond d'un profond ravin, un lit d'argile noire avec *Cardiums, Mélanopsides, Néritines,* est superposé à une couche de lignite tourbeux de mauvaise qualité.

Autour du village d'Antimaki la couche argilo-sableuse à *Ostrea lamellosa?* prend une puissance plus considérable; elle atteint une épaisseur de plusieurs mètres et se continue jusqu'au col de Pylli.

D'Antimaki à Képhalos la partie supérieure de l'isthme est recouverte par le conglomérat ponceux sur lequel on rencontre par places une couche de sable, formée entièrement par des grains de feldspath vitreux; mais plus près du rivage nord, dans une série de ravins, apparaissent très-nettement les formations pliocéniques.

Le premier ravin, situé à une demi-heure ouest d'Antimaki a fourni la coupe III (*Pl. II*); plus loin, dans une série de trois ravins, on retrouve les mêmes couches où les coquilles de mollusques forment de véritables amas : tantôt ce sont des polypiers, des dentales; tantôt des bivalves, *Venus, Cardium,* etc., dont les débris se sont accumulés sur une plage où les eaux étaient peu profondes et tranquilles, et où se trouvaient réunies toutes les conditions nécessaires à un développement remarquable de toutes les espèces de mollusques. On retrouve encore ici, au-dessous de ces couches, des argiles avec traces de lignites et quelques fossiles d'eau douce. Plus loin les sables reprennent de l'importance, et ce sont eux qui terminent, du côté de Képhalos, l'étage pliocénique dont la partie supérieure est encore représentée par la couche à *Ostrea.*

Le mélange de mollusques d'eau douce à des espèces marines et les variations de forme que leurs coquilles ont pu éprouver par suite des changements survenus dans le milieu où ils vivent ordinairement est l'une des questions les plus intéressantes que présente l'étude de la faune de Cos. Déjà en 1847, E. Forbes, dans un travail sur les mollusques de la mer Egée, a signalé cette remarquable circonstance et en a fait l'objet d'une Notice particulière.

Cette étude est surtout facile à suivre au point où la coupe IV (*Pl. II*) a été prise et que je désigne sous le nom de *col Pylli*, passage en pente rapide, traversé par la route qui monte du vallon de Pylli au plateau d'Antimaki.

Des conglomérats ponceux et des sables micacés, renfermant quelques débris de ponce à leur partie supérieure, occupent le sommet de la colline qui domine la route; les couches qui viennent au-dessous sont relevées de quelques degrés vers l'est et composées de graviers, de marnes et de sables sans fossiles; elles recouvrent une couche puissante de marnes argileuses avec huîtres, cardiums, etc.

A cette couche supérieure, de formation essentiellement marine, succède une série d'assises d'argile noire, séparées par des lits de sable, où, avec les fossiles précédents, on trouve mélangées des Mélanopsides et des Néritines qui ne paraissent pas avoir été roulées.

La faune marine, d'abord dominante, diminue d'importance avec la profondeur des couches, et, dans la partie la plus basse, que le ravinement des terrains permet d'étudier, les coquilles marines sont très-rares et représentées seulement par des Cardiums; les Néritines, au contraire, y étaient très-fréquentes. C'est de ce point, je crois, que provenaient les fossiles étudiés par E. Forbes et qui lui ont permis de tirer certaines conséquences sur les changements de niveau qui, à l'époque pliocénique, ont fait souvent, dans cette région, varier la nature des dépôts. Les explorations que j'ai faites dans l'île de Cos, l'étude des roches et des phénomènes volcaniques qui agitent encore les îles voisines de Hyali et de Nisyros m'ont paru confirmer les hypothèses de E. Forbes.

Les changements survenus dans cette partie des Sporades, pendant l'époque tertiaire, changements ayant la plus grande analogie avec ceux qui ont bouleversé une partie du bassin de la Méditerranée, touchent à une question pouvant jeter un certain jour sur l'existence de ces faunes si riches en grands Mammifères de Pikermi, de Lapsista, etc., et sur la migration de certaines plantes, dont les représentants vivent, à notre époque, sur des points séparés des bassins où les mêmes genres existent à l'état fossile, par de longs espaces de mer. Ne pouvant pas entrer dans la discussion d'une si grande question, je me bornerai à présenter quelques considérations sur la formation des dépôts indiqués dans cette Notice.

A la fin de l'époque miocénique les collines de calcaire secondaire de Képhalos et la petite chaîne des monts Piperia et du prophète Elias formaient deux îlots dans un grand lac, s'avançant probablement très-loin au milieu des formations tertiaires anciennes de la côte voisine d'Asie Mineure. La profondeur des eaux de ce lac était considérable aux extrémités est et ouest de l'île actuelle, tandis que la partie centrale était occupée par des bas-fonds et en certains points par des marécages où se développaient les végétaux qui ont produit le petit dépôt de lignite indiqué. Une première poussée volcanique, accompagnée de l'éruption des trachytes de Boudroum et de la chaîne principale de l'île, amène un premier changement dans la forme du bassin. Les couches situées aux environs du centre éruptif émergent entièrement, tandis que celles du plateau d'Antimaki restent encore sous l'eau; toutefois cette eau est devenue saumâtre par suite de l'introduction de la mer, qui a produit un mélange insuffisant pour détruire la faune lacustre, mais permettant à certaines espèces marines de se développer.

Après une époque de repos, un nouveau changement dans le niveau du sol amène une seconde perturbation dans le régime des eaux; des courants se produisent, et, au lieu d'un dépôt d'argile, ce sont des sables qu'ils apportent; en même temps une nouvelle quantité d'eau de mer est introduite, la salure du lac augmente et avec elle le développement des espèces marines.

Une série de ces oscillations suivie d'un temps de repos plus ou moins long se continue pendant l'époque pliocénique, et, la mer ayant envahi une certaine partie du lac, toutes les espèces d'eau douce disparaissent et font place à des mollusques exclusivement marins.

A la fin de cette époque les deux îlots de l'est et de l'ouest se sont accrus de toutes les formations lacustres dont les lambeaux existent encore du cap Foukas à Pylli et autour de Képhalos; ils sont séparés par un détroit peu profond où se forment ces dépôts bourrés de coquilles parmi lesquelles les bivalves dominent.

Les mouvements volcaniques se produisent de nouveau et acquièrent une intensité encore plus grande; bientôt le volcan de Nisyros s'élève au-dessus de la mer et de son cratère sont lancées des quantités énormes de ponces qui vont recouvrir les formations pliocéniques qu'un soulèvement a fait émerger.

L'îlot de Hyali se forme, montrant, entre des lits de ponce, des couches fossilifères où les espèces, comme le *Turbo rugosus*, la *Venus verrucosa*, la *Natica mille-punctata*, etc., indiquent bien l'époque quaternaire comme celle où se passent ces derniers phénomènes.

Autour de Képhalos apparaissent les cônes volcaniques d'Hagios Joannis, qui se font jour à travers les formations lacustres infra-pliocéniques.

Des dislocations considérables se produisent, et cette partie du bassin de la Méditerranée prend la configuration qu'elle a conservée, sans changements notables, jusqu'à nos jours (1).

---

(1) Relativement à l'île de Cos, consulter aussi le Mémoire publié par M. O. Rayet (1re livraison du tome III des *Archives des missions scientifiques et littéraires*).

DE LA

# DISTRIBUTION DU MAGNÉTISME LIBRE

SUR

## DES PLAQUES D'ACIER ELLIPTIQUES OU CIRCULAIRES,

PAR M. E. DUTER.

## AVANT-PROPOS.

Le problème de la distribution du magnétisme libre est loin d'être résolu par la théorie mathématique; en effet, dès que les aimants n'ont pas certaines dimensions très-petites par rapport aux autres, comme il arrive, par exemple, dans les aiguilles d'acier longues et minces, les équations différentielles auxquelles conduit la théorie mathématique sont en général réfractaires à l'intégration. De plus, s'il s'agit d'aimants d'acier et non de fer doux, les équations renferment la force coercitive, qui varie (au moins en direction), d'un point à un autre, suivant des lois que le seul calcul ne peut faire connaître. Il faut nécessairement, pour résoudre la question, avoir recours à l'expérience.

Jusque dans ces dernières années, les plus importantes données expérimentales sur la distribution du magnétisme libre dans les aimants d'acier étaient fournies par les recherches de Coulomb. On sait que ce savant a étudié la distribution du magnétisme sur des aimants prismatiques longs et étroits.

Biot a donné une formule qui résume les résultats de Coulomb. Plus tard Green établit une théorie mathématique fondée seulement sur les lois élémentaires de Coulomb et sur l'hypothèse de la force coercitive.

Récemment, mais dans un genre de questions différentes de celles

qui sont traitées dans ce travail, M. Bouty a vérifié d'importantes formules de Green. En se plaçant au seul point de vue de la distribution du magnétisme libre, les équations différentielles établies par Green ne permettent généralement pas, pour les raisons que j'ai dites plus haut, de résoudre complétement la question. A la fin de son immense travail, l'illustre mathématicien anglais ne peut constater l'accord de ses formules et de l'expérience que dans le seul cas étudié par Coulomb.

D'un autre côté, à la même époque, les données expérimentales étaient bien peu nombreuses.

Le peu de progrès qu'avait fait la question de la distribution du magnétisme était dû à l'insuffisance des procédés expérimentaux : la méthode des oscillations est d'une application restreinte, et la méthode des torsions est extrêmement longue.

Aujourd'hui les recherches sur le magnétisme sont beaucoup plus faciles. Depuis plusieurs années, M. Jamin a, par de nombreux travaux, singulièrement rajeuni et pour ainsi dire transformé le magnétisme; il a de plus mis entre les mains des physiciens un appareil puissant d'investigation, qui permet d'étudier tel point que l'on veut d'un aimant.

M. Jamin a dès lors fait connaître des aimants bien différents de ceux que l'on possédait naguère, et l'illustre physicien a fait voir que l'hypothèse électromagnétique d'Ampère ne suffisait pas à les expliquer. Il considère les aimants comme formés de filets passant à travers la ligne neutre ou ceinture moyenne; mais leur épanouissement aux extrémités, les tensions qui y sont répandues, dépendent essentiellement de la forme des aimants.

J'ai cherché à résoudre la question dans le cas d'aimants d'acier, plats et terminés par des ellipses et des cercles.

### *But de ce travail.*

Ce travail est relatif à l'influence de la forme sur la distribution du magnétisme libre dans les aimants d'acier. J'ai effectué mes recherches sur des plaques de 1 millimètre d'épaisseur taillées dans le même acier et possédant la même trempe.

Ces plaques sont limitées par des ellipses et des cercles de dimensions diverses. Les dimensions des axes de symétrie des courbures limita-

trices des aimants varient entre 10 et 30 centimètres. Tous sont aimantés à saturation dans une très-forte bobine plate, les enveloppant complétement, formée par quatre cents tours d'un fil de cuivre de 2 millimètres de diamètre. Dans le fil circule, pendant l'aimantation, le courant de dix bons éléments de Bunsen. L'un des axes de symétrie de la plaque est la ligne neutre, et je dirai bientôt comment j'ai pu m'assurer que l'aimantation était parfaitement régulière.

### *Énoncé des résultats.*

Les résultats que j'ai obtenus se résument ainsi :

1° *La totalité du magnétisme libre, répandu sur des surfaces elliptiques ou circulaires, est proportionnelle aux surfaces aimantées.*

2° *Ce magnétisme est distribué suivant des filets hyperboliques, ayant tous la perpendiculaire élevée par le centre de la plaque sur la ligne neutre de l'aimant pour axe non transverse* en grandeur et en direction.

Ces hyperboles seront complétement définies, si l'on ajoute que chacune d'elles passe par un point déterminé du contour de la plaque, et que toutes ont en *direction,* pour axe transverse, la ligne neutre.

Sur chaque hyperbole, l'intensité du magnétisme libre en un point considéré est donnée par la formule

$$I = A(a^h - a^{-h}); \tag{1}$$

$h$ est la distance du point considéré à la ceinture moyenne, cette distance étant comptée sur l'arc d'hyperbole rectifié où se trouve le point en question. A et $a$ sont deux paramètres qui varient d'un filet à un autre, suivant les deux lois suivantes :

3° *L'intensité* I *du magnétisme libre à l'extrémité de chaque filet hyperbolique est donnée par la formule*

$$I_1 = \frac{L}{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{h_1}{h} \tag{2}$$

ou

$$\frac{L}{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{h_1}{\pi} = A(a^{h_1} - a^{-h_1}), \tag{2 bis}$$

$h_1$ est la longueur de l'arc rectifié d'hyperbole suivi par le filet depuis la ceinture moyenne jusqu'à son extrémité. L est une constante qui ne dépend que de la nature et de la trempe de l'acier employé, et qui, dans toutes mes expériences, s'est trouvée égale à 17,1011. $k$ est une autre constante qui ne dépend encore que de l'acier, à la condition cependant que l'aimant ne devienne pas trop étroit, par rapport à sa longueur.

Dans les plaques dont je m'occupe ici, $k$ oscille très-peu autour de la moyenne 13,213.

4° *La totalité du magnétisme libre, répandu sur chaque filet hyperbolique, est proportionnelle au carré de l'intensité du magnétisme libre à l'extrémité de ce filet, ce qui conduit à la formule*

$$\frac{A}{L_a}(a^k + a^{-k} - 2) = CA^2(a^k - a^{-k})^2.$$

C est une dernière constante ne dépendant encore que de l'acier, et qui, dans toutes mes recherches, était égale à 0,6491.

5° *Les lignes d'égales tensions ou lignes isodynamiques sont des courbes transcendantes, ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1,$$

où $x$ est l'abscisse rectiligne du point considéré, et $h$ son ordonnée curviligne comptée sur l'hyperbole (définie plus haut). $b$ est la distance au centre du point où cette courbe isodynamique coupe la ligne de plus grande aimantation, et $a$ est la demi-longueur de la ligne neutre.

### *Méthode de recherches.*

Dans mes recherches, je me suis servi de la méthode d'investigation de M. Jamin : c'est la seule qui permette d'étudier tel point que l'on veut d'un aimant, en mesurant en chaque point la force d'arrachement d'un petit contact sphérique de fer doux; la racine carrée de la force d'arrachement donne l'intensité du magnétisme libre au point considéré.

Pour apprécier la force d'arrachement du petit contact, M. Jamin

l'attache à l'un des plateaux d'une balance sensible, et sous l'autre plateau fixe un ressort à boudin ; l'extrémité opposée de ce ressort est reliée par un fil de soie à un treuil micrométrique. On peut dès lors, et cela sans secousse, tendre progressivement le petit ressort, jusqu'au moment où sa tension fait équilibre à la force qui relie le contact à l'aimant. Le micromètre donne l'allongement du ressort; à cet allongement correspond un poids indiqué par une graduation préalable du ressort.

On voit combien est commode ce procédé qui met entre les mains de l'expérimentateur une véritable sonde magnétique. Il a surtout un très-grand avantage, c'est qu'il donne, sans correction aucune, les tensions magnétiques sur les bords des aimants. On sait que, dans la méthode des oscillations, les tensions obtenues en étudiant les régions centrales d'un barreau ne sont pas comparables à celles que l'on obtient vers les extrémités, et qu'une correction est nécessaire.

Il n'en est pas de même dans la méthode de l'arrachement d'un très-petit contact de fer doux. Ce contact est retenu par une force qui ne dépend que du magnétisme libre répandu dans une très-petite région avoisinant le point de contact; l'étendue de cette région est constante pour un même acier, de sorte que, au point de vue des résultats numériques des expériences, il n'y a plus à considérer de points singuliers.

Ainsi on va voir tout à l'heure que les tensions magnétiques mesurées sur les bords de mes aimants (très-minces par rapport à leurs longueurs et à leurs largeurs), on va voir, dis-je, que ces tensions obéissent sans correction aucune aux mêmes lois que celles qui sont répandues sur les parties centrales des plaques.

Pour assurer le succès complet de la méthode, il faut donner aux aimants des surfaces parfaitement polies : la moindre souillure interposée entre le contact et la surface métallique de l'aimant altère de la façon la plus irrégulière les résultats que l'on devrait obtenir.

Il faut aussi donner à l'appareil une base inébranlable, ce que j'ai fait en le plaçant au rez-de-chaussée d'un pavillon isolé dans un jardin. Le support immédiat de ma balance était un très-fort établi de menuisier.

On doit, en outre, observer une autre précaution bien importante, qui consiste à mettre les plaques aimantées à l'abri de tout choc, même le

plus léger en apparence. Je me suis assuré très-souvent, dans mes recherches, que le choc un peu brusque du petit clou d'arrachement retombant sur un point de l'aimant altérait d'une façon très-notable et permanente la tension magnétique en ce point. Il faut donc, chaque fois que le clou d'arrachement a quitté l'aimant, l'empêcher d'y retomber brusquement.

Cela posé, il va être immédiatement question de mes aimants et principalement :

1° D'une ellipse dont le petit axe, qui est la ligne neutre, a 20 centimètres de longueur et dont le grand axe en a 30;

2° D'une ellipse de mêmes dimensions que la précédente, mais dont le grand axe est la ligne neutre;

3° D'une ellipse dont les axes ont 10 et 30 centimètres de longueur et dont le petit axe est la ligne neutre;

4° D'un cercle de 20 centimètres de diamètre;

5° D'un cercle de 25 centimètres de diamètre;

6° D'un cercle de 30 centimètres de diamètre.

C'est sur cette dernière plaque, la plus vaste de toutes celles que j'ai employées, que j'ai exécuté le plus de recherches. C'est sur elle que je donnerai le plus de résultats numériques.

Toutes mes plaques ont 1 millimètre d'épaisseur.

Les *fig.* 1, 2, 3, 4 et 5 représentent des cadrans de mes aimants; les lignes neutres sont indiquées sur les figures.

Au-dessous du clou d'arrachement et à une distance de ce clou égale à l'épaisseur de la plaque à étudier, j'ai placé un plan poli et horizontal; il est divisé en centimètres carrés, de sorte que j'amène facilement chaque point que je veux étudier, juste dans la verticale du clou et en contact avec lui.

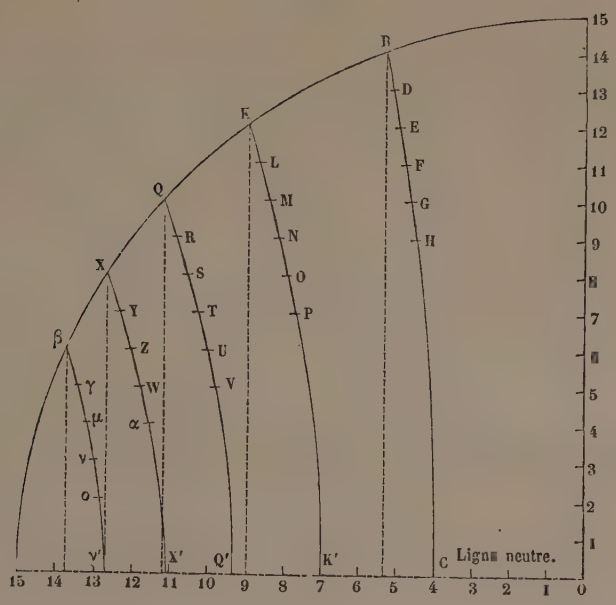
Avant tout, j'ai voulu m'assurer de la régularité de l'aimantation, et, pour y parvenir, j'ai opéré de la façon suivante :

Sur chaque plaque j'ai tracé deux diamètres, l'un incliné à 45 degrés et l'autre à 30 degrés sur la ligne neutre; de plus l'un est dans les angles $yOx$, $y'Ox'$ et l'autre dans les angles respectivement adjacents aux deux premiers.

Sur chacun de ces diamètres j'ai étudié, de part et d'autre du centre, des points équidistants de ce centre, et les différences de tensions entre

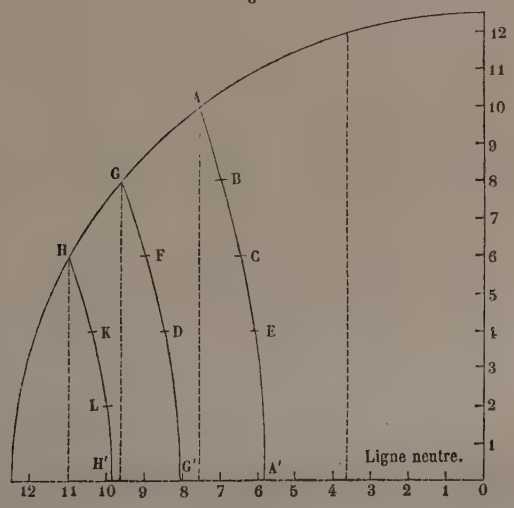
deux points situés sur un même diamètre à égale distance du centre ont toujours été négligeables.

Fig 1.




Je pouvais donc en toute sécurité me contenter d'étudier un cadran

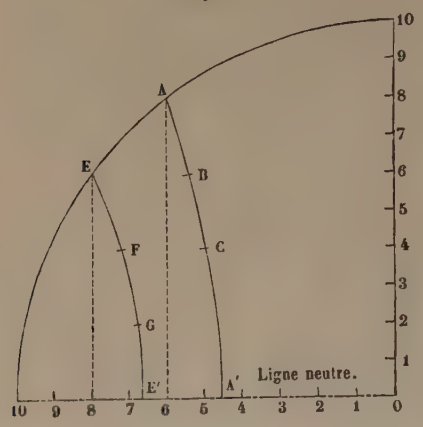
Fig. 2.




de chaque plaque, et étendre aux trois autres les résultats obtenus.

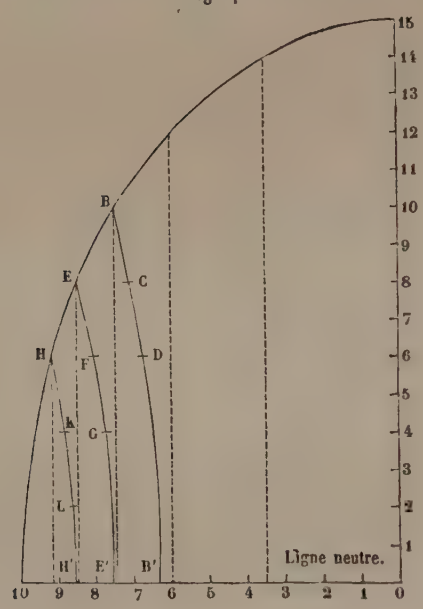
Mais ce n'est pas là tout ce que cette vérification a pu m'offrir; on constate qu'à mesure que les diamètres étudiés se rapprochent de la

Fig. 3.




ligne neutre, les tensions magnétiques y diminuent de plus en plus

Fig. 4.



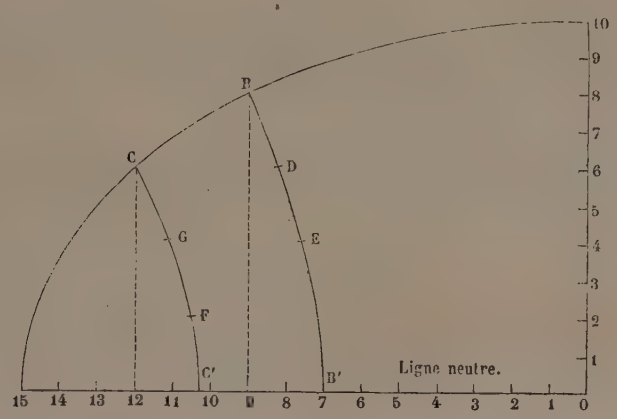

pour des points situés sur les mêmes circonférences; de plus, dans le cas du cercle, cette loi de décroissance est remarquablement simple.

En effet, sur un point quelconque de l'aimant circulaire, dont la distance au centre est $\rho$, l'intensité du magnétisme libre est donnée par la formule

$$I = A(a^{\rho} - a^{-\rho}).$$

$a$ est absolument constant pour une même plaque; A seulement varie d'un diamètre à un autre, suivant une loi qui se déduit immédiatement de celles que j'ai énoncées en tête de cette étude.

Fig. 5.




En d'autres termes, sur un même diamètre d'un cercle, les tensions magnétiques des divers points *sont dans un rapport constant* avec celles des points situés aux mêmes distances du centre sur l'axe de la plaque perpendiculaire à la ligne neutre.

On va juger de l'exactitude de cette loi par les nombres suivants, empruntés à deux diamètres étudiés sur le cercle de 30 centimètres.

### Tableau I.

*Tensions sur un diamètre incliné de 45 degrés sur la ligne neutre.*

| Distances au centre. | Tensions mesurées. | Tensions calculées. |
|---|---|---|
| 15 | » | » |
| 14,14 | 6,10 | 6,060 |
| 11,31 | 4,00 | 3,912 |
| 8,48 | 2,67 | 2,605 |
| 5,65 | 1,54 | 1,590 |
| 2,82 | 0,72 | 0,752 |

TABLEAU II.

*Tensions sur un diamètre incliné de 30 degrés sur la ligne neutre.*

| Distances au centre. | Tensions mesurées. | Tensions calculées. |
|---|---|---|
| 15 | » | » |
| 13,85 | 3,97 | 3,932 |
| 10,39 | 2,41 | 2,484 |
| 6,92 | 1,40 | 1,452 |
| 3,46 | 0,67 | 0,669 |

Après avoir obtenu ces premiers résultats, j'ai étudié le magnétisme libre répandu sur des ordonnées d'égales longueurs prises dans les cercles et les ellipses; j'ai indiqué, dans les *fig.* 1, 2, 3, 4 et 5, ces ordonnées par des lignes ponctuées.

Cette étude m'a fourni les tableaux suivants. Dans ces tableaux, D est la distance en centimètres de chaque point à la ceinture moyenne.

TABLEAU III.

*Tensions sur des ordonnées de 15 centimètres.*

| D | Cercle de rayon 15. | Ellipse $a=10$, $b=15$. |
|---|---|---|
| 15 | 9,25 | 9,31 |
| 14 | 8,12 | 8,17 |
| 13 | 7,15 | 7,12 |
| 12 | 6,25 | 6,19 |
| 11 | 5,55 | 5,57 |
| 10 | 4,80 | 4,82 |
| 9 | 4,25 | 4,21 |
| 8 | 3,51 | 3,49 |
| 7 | 3,12 | 3,09 |
| 6 | 2,48 | 2,50 |
| 5 | 2,11 | 2,09 |
| 4 | 1,60 | 1,54 |
| 2 | 0,73 | 0,75 |

TABLEAU IV.

*Tensions sur des ordonnées de 14 centimètres.*

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 8,91 | 8,97 |
| 13 | 7,49 | 7,52 |
| 12 | 6,41 | 6,47 |
| 11 | 5,65 | 5,60 |

| D | Cercle de rayon 15. | Ellipse $a=10$, $b=5$. |
|---|---|---|
| 10 | 4,89 | 4,79 |
| 9 | 4,36 | 4,40 |
| 8 | 3,76 | 3,77 |
| 7 | 3,25 | 3,19 |
| 6 | 2,69 | 2,50 |
| 5 | 2,21 | 2,19 |
| 4 | 1,68 | 1,71 |
| 2 | 0,75 | 0,70 |

## Tableau V.

*Ordonnées de 12 centimètres.*

| D | Cercle de rayon 15. Tensions. | Ellipse $a=10$, $b=15$. Tensions. | Cercle de rayon 12,5. Tensions. |
|---|---|---|---|
| 12 | 8,08 | 8,12 | 8,05 |
| 11 | 6,95 | 6,80 | 6,91 |
| 10 | 6,00 | 6,11 | 6,11 |
| 9 | 5,29 | 5,32 | 5,22 |
| 8 | 4,55 | 4,47 | 4,41 |
| 7 | 3,95 | 3,90 | 3,90 |
| 6 | 2,75 | 2,80 | 2,68 |
| 5 | 2,20 | 2,15 | 2,19 |
| 4 | 1,67 | 1,61 | 1,69 |
| 2 | 0,81 | 0,88 | 0,79 |

## Tableau VI.

*Ordonnées de 10 centimètres.*

| D | Cercle de rayon 15. Tensions. | Ellipse $a=10$, $b=15$. Tensions. | Ellipse $a=15$, $b=10$. Tensions. | Cercle de rayon 12,5. Tensions. | Cercle de rayon 10. Tensions. |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 7,16 | 7,17 | 7,10 | 7,15 | 7,11 |
| 9 | 6,02 | 6,11 | 6,00 | 6,03 | 6,04 |
| 8 | 5,00 | 5,09 | 4,89 | 5,02 | 5,08 |
| 7 | 4,49 | 4,52 | 4,45 | 4,41 | 4,48 |
| 6 | 3,79 | 3,81 | 3,70 | 3,72 | 3,70 |
| 5 | 3,01 | 3,04 | 2,94 | 3,00 | 2,98 |
| 4 | 2,24 | 2,26 | 2,21 | 2,19 | 2,18 |
| 2 | 1,11 | 1,09 | 1,15 | 1,07 | 1,10 |

### Tableau VII.

*Ordonnées de 8 centimètres.*

| D. | Cercle de rayon 15. Tensions. | Ellipse $a=10$, $b=15$. Tensions. | Ellipse $a=15$, $b=10$. Tensions. | Cercle de rayon 12,5. Tensions. | Cercle de rayon 10. Tensions. |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6,05 | 6,11 | 6,14 | 6,09 | 6,08 |
| 7 | 5,25 | 5,37 | 5,39 | 5,29 | 5,31 |
| 6 | 4,61 | 4,59 | 4,60 | 4,60 | 4,63 |
| 5 | 3,90 | 3,88 | 3,80 | 3,83 | 3,92 |
| 4 | 2,38 | 2,40 | 2,41 | 2,41 | 2,44 |
| 3 | 1,63 | 1,60 | 1,65 | 1,67 | 1,60 |
| 1 | 0,61 | 0,64 | 0,59 | 0,58 | 0,60 |

### Tableau VIII.

*Ordonnées de 6 centimètres.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4,71 | 4,60 | 4,89 | 4,77 | 4,75 |
| 5 | 4,11 | 4,11 | 4,17 | 4,20 | 4,10 |
| 4 | 3,61 | 3,60 | 3,64 | 3,62 | 3,60 |
| 3 | 2,80 | 2,71 | 2,80 | 2,78 | 2,84 |
| 2 | 1,99 | 2,00 | 2,02 | 2,00 | 2,05 |
| 1 | 0,93 | 0,90 | 0,95 | 0,89 | 0,91 |

### *Interprétation des résultats numériques.*

Une fois en possession de ces résultats, il s'agissait de les rassembler et de les interpréter. Pour y parvenir, j'ai employé un procédé essentiellement physique : je veux parler des constructions graphiques. Toutes ces constructions ont d'abord été faites sur un excellent papier quadrillé au millimètre et en prenant 50 millimètres pour unité.

J'ai choisi alors des axes de coordonnées rectangulaires, en prenant pour abscisses les points étudiés sur chaque ordonnée de mes plaques, et en élevant sur chaque point de division des perpendiculaires proportionnelles aux intensités mesurées.

Je n'avais plus qu'à joindre ces perpendiculaires par un trait continu pour avoir des courbes représentant la variation du magnétisme libre sur chaque ordonnée étudiée de chaque plaque.

Les aires comprises entre ces courbes et leurs axes de coordonnées,

évaluées avec les soins les plus minutieux, m'ont donné la totalité du magnétisme libre répandu sur la totalité d'une ordonnée.

On peut remarquer tout d'abord, en se reportant aux tableaux III, IV, V, etc., que pour les cercles et les ellipses qui ont même axe magnétique, les tensions sur des ordonnées de mêmes longueurs, voisines de l'axe, peuvent être considérées comme étant exactement les mêmes; ainsi, pour des ordonnées de 15,14 et même de 12 centimètres, on obtient sur chaque ordonnée de longueur déterminée les mêmes courbes pour les cercles et les ellipses; mais, à mesure qu'on s'écarte des axes des aimants, les différences relatives entre les courbes construites sur les mêmes ordonnées vont en croissant tout en restant faibles.

Aussi semble-t-il au premier abord que, dans les aimants dont je m'occupe, le magnétisme soit distribué suivant des filets perpendiculaires à la ceinture moyenne, et que la loi de distribution des tensions sur chaque filet ne dépende que de leur longueur. Le problème serait alors singulièrement simplifié; en effet, si pour un acier d'épaisseur, de trempe et de nature déterminées, la totalité du magnétisme sur une ordonnée de longueur déterminée est donnée par une fonction $f(y)$ de cette ordonnée, on arrive aux conséquences suivantes.

Le magnétisme répandu entre deux ordonnées infiniment voisines est $f(y)\,dx$ et, si $x = \varphi(y)$ est l'équation de la courbe limitatrice de l'aimant, on a

$$f(y)\,dx = f(y)\,\varphi'(y)\,dy,$$

de sorte que le magnétisme total répandu entre deux ordonnées $y_1$ et $y_2$ serait

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y)\varphi'(y) \text{ et } dy.$$

Un examen attentif fait voir que le problème est bien autrement compliqué. En effet, dans les régions axiales d'un aimant, l'influence de la forme est peu sensible, à moins que l'aimant ne se termine par des pointes aiguës; mais, à mesure que l'on s'éloigne de l'axe, la distribution est différente suivant les différentes formes et c'est ce que montrent les tableaux VI, VII et VIII. On doit prendre d'autant plus garde aux différences de ces tensions que leurs valeurs absolues sont plus petites.

Cela posé, j'ai étudié les totalités du magnétisme répandu sur chaque plaque; pour cela, j'ai pris des axes de coordonnées rectangulaires, et sur l'axe des abcisses j'ai porté des longueurs proportionnelles aux ordonnées étudiées; par chaque point de division j'ai élevé des perpendiculaires proportionnelles aux aires des courbes qui donnent la totalité du magnétisme répandu sur les ordonnées des plaques.

Je donne, dans le tableau n°IX, les nombres qui ont servi à cette construction.

TABLEAU IX.

| Ordonnées. | Abscisses. | | | | | Cercle de rayon 15. Aires. | Ellipse $a=10$, $b=15$. Aires. | Ellipse $a=15$, $b=10$. Aires. | Cercle de rayon 12,5. Aires. | Cercle de rayon 10. Aires. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 0 | 0 | » | » | » | 55,55 | 56,26 | » | » | » |
| 14 | 5,38 | 3,52 | » | » | » | 49,21 | 49,26 | » | » | » |
| 12 | 9 | 6 | » | » | » | 41,18 | 42,12 | » | 44,50 | » |
| 10 | 11,18 | 7,45 | 0 | 7,50 | 0 | 32,49 | 32,55 | 32,10 | 33,49 | 33,00 |
| 8 | 12,68 | 8,46 | 9 | 9,59 | 6 | 24,37 | 24,48 | 25,09 | 24,36 | 24,30 |
| 6 | 13,74 | 9,15 | 12 | 10,96 | 8 | 15,96 | 16,00 | 15,01 | 15,90 | 15,89 |

En faisant la quadrature des aires comprises entre les axes de coordonnées et les courbes représentant la variation du magnétisme répandu sur toute l'ordonnée d'un point quelconque du bord de chaque plaque, j'ai obtenu les totalités du magnétisme libre répandu sur chaque plaque.

Comme le résultat que j'ai obtenu m'a causé une surprise extrême, j'ai recommencé ces opérations avec le plus grand soin. Voici les nombres qui mesurent la totalité du magnétisme répandu sur chaque plaque:

| | |
|---|---|
| Pour le cercle de rayon 15 | 583,785 |
| Pour l'ellipse $a=10$, $b=15$ | 391,124 |
| Pour l'ellipse $a=15$, $b=10$ | 388,012 |
| Cercle de rayon 12,5 | 403,370 |
| Cercle de rayon 10 | 258,400 |

Or, si l'on divise ces nombres par les carrés des rayons pour les cercles, et par les produits des moitiés des axes pour les ellipses, on

trouve les quotients successifs :

$$\frac{583,785}{225} = 2,594,$$

$$\frac{391,124}{150} = 2,607,$$

$$\frac{388,012}{150} = 2,586,$$

$$\frac{403,370}{156,25} = 2,577,$$

$$\frac{258,400}{100} = 2,584.$$

Enfin une dernière ellipse très-allongée (30 centimètres pour le grand axe, et 10 pour le petit) donne comme totalité du magnétisme 193,807, nombre qui, divisé par 75, donne encore le même quotient 2,584. Ainsi, dans les aimants circulaires et elliptiques, la totalité du magnétisme répandu sur chaque plaque est proportionnelle aux aires sur lesquelles il est répandu : il reste à voir comment est distribué ce magnétisme sur les différentes plaques.

*Forme hyperbolique des filets magnétiques dans les aimants circulaires et elliptiques.*

Si l'on se reporte aux tableaux précédents donnant les tensions magnétiques sur des ordonnées d'égales longueurs, on voit que, pour les mêmes ordonnées étudiées sur des plaques différentes, ces tableaux diffèrent très-peu ; mais, à mesure qu'on s'éloigne des axes des aimants, les différences s'accentuent ; en voici la raison :

Dans tous les aimants que je considère dans ce travail, les tensions I sont données sur la ligne axiale par la formule

$$(m) \qquad I = A(a^z - a^{-z}),$$

dans laquelle $z$ est la distance d'un point quelconque au centre de l'aimant. A et $a$ sont deux paramètres qui, pour un même acier, ne dépendent sensiblement que de la longueur de l'axe, pourvu cependant que la courbe limitatrice de l'aimant n'ait ni points d'inflexion, ni

points anguleux et que ses dimensions transversales ne soient pas trop faibles par rapport à son axe longitudinal.

Les deux quantités A et $a$ varient avec la longueur de l'axe suivant deux lois que je vais établir tout à l'heure.

Si, après avoir vérifié que la formule ($m$) s'applique parfaitement aux tensions répandues sur l'axe de l'aimant, on vient à l'essayer pour des ordonnées de plus en plus marginales, les différences relatives entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience sont de plus en plus marquées.

Il en est de même de tous les essais que l'on fait pour trouver des lois simples représentant la distribution magnétique sur des *ordonnées rectilignes*, perpendiculaires à la ligne neutre.

Mais toute difficulté disparaît si l'on considère sur la surface des aimants une série d'hyperboles ainsi définies.

Que par *chaque point* du contour de la plaque on trace une hyperbole ayant son axe transverse dirigé suivant la ligne neutre, et ayant l'axe de la plaque perpendiculaire à la ligne neutre pour axe non transverse *en grandeur* et *en direction*, on aura une série de lignes où l'intensité du magnétisme libre en un point quelconque est donnée par la formule

$$I = A(a^h - a^{-h}),$$

dans laquelle $h$ est la longueur de l'arc rectifié d'hyperbole sur laquelle se trouve le point considéré; cette longueur est comptée à partir du point où l'hyperbole coupe la ceinture moyenne.

Quant à A et $a$, je vais bientôt donner les lois de leurs variations. Voici une série de seize tableaux donnant, avec les tensions mesurées sur des points déterminés des hyperboles, des tensions calculées d'après la formule $I = A(a^h - a^{-h})$; à ces tableaux correspondent les *fig.* 1, 2, 3, 4, 5, où les hyperboles sont tracées en lignes pleines. Les points étudiés portent les mêmes lettres sur les figures que dans les tableaux.

### Tableau X.

Ligne axiale. Cercle de rayon 15.

$A = 1,625, \quad a = 1,1251, \quad I = A(a^z - a^{-z})$.

| $z$. | I mesuré. | I calculé. |
|---|---|---|
| 15 | 9,25 | 9,244 |
| 14 | 8,12 | 8,142 |
| 12 | 6,25 | 6,290 |
| 10 | 4,80 | 4,781 |
| 8 | 3,51 | 3,536 |
| 6 | 2,48 | 2,494 |

### Tableau XI.

Cercle de rayon 15 (*fig.* 1). Hyperbole BC.

$I = A(a^h - a^{-h}), \quad A = 1,836, \quad a = 1,1217$.

| Points étudiés. | Ordonnées. | Abscisses. | $h$. | I mesuré. | I calculé. |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 14 | 5,38 | CB = 14,094 | 8,91 | 8,900 |
| D | 13 | 5,21 | CD = 13,078 | 7,87 | 7,835 |
| E | 12 | 5,04 | CE = 12,064 | 6,81 | 6,878 |
| F | 11 | 4,86 | CF = 11,051 | 5,95 | 6,014 |
| G | 10 | 4,73 | CG = 10,042 | 5,28 | 5,237 |
| H | 9 | 4,59 | CH = 9,032 | 4,56 | 4,529 |

### Tableau XII.

Cercle de rayon 15 (*fig.* 1). Hyperbole K'K.

$I = A(a^h - a^{-h}), \quad A = 2,128, \quad a = 1,1212$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| K | 12 | 9 | K'K = 12,195 | 8,08 | 8,051 |
| L | 11 | 8,71 | K'L = 11,154 | 7,00 | 7,003 |
| M | 10 | 8,44 | K'M = 10,119 | 6,14 | 6,095 |
| N | 9 | 8,19 | K'N = 9,089 | » | » |
| O | 8 | 7,96 | K'O = 8,066 | 4,52 | 4,504 |
| P | 7 | 7,74 | K'P = 7,045 | 3,85 | 3,810 |

### Tableau XIII.

Cercle de rayon 15 (*fig.* 1). Hyperbole $\varphi'\varphi$.

$I = A(a^h - a^{-h}), \quad A = 3,3000, \quad a = 1,0964$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Q | 10 | 11,18 | Q'Q = 10,219 | 7,16 | 7,166 |
| R | 9 | 10,84 | Q'R = 9,163 | 6,25 | 6,207 |
| S | 8 | 10,54 | Q'S = 8,119 | 5,43 | 5,403 |
| T | 7 | 10,26 | Q'T = 7,081 | 4,58 | 4,612 |
| U | 6 | 10,01 | Q'U = 6,051 | 3,80 | 3,841 |
| V | 5 | 9,80 | Q'V = 5,030 | 2,48 | 2,439 |

### Tableau XIV.

Cercle de rayon 15 (*fig.* 1). Hyperbole X'X.

$I = A(a^h - a^{-h})$, $A = 3{,}930$, $a = 1{,}0901$.

| Points étudiés. | Ordonnées. | Abscisses. | $h$. | I mesuré. | I calculé. |
|---|---|---|---|---|---|
| X | 8 | 12,68 | XX' = 8,184 | 6,05 | 6,036 |
| Y | 7 | 12,35 | X'Y = 7,121 | 5,15 | 5,138 |
| Z | 6 | 12,05 | X'Z = 6,077 | 4,33 | 4,292 |
| W | 5 | 11,80 | X'W = 5,047 | 3,50 | 3,531 |
| α | 4 | 11,59 | X'α = 4,026 | 2,79 | 2,785 |

### Tableau XV.

Cercle de rayon 15 (*fig.* 1). Hyperbole βν.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| β | 6 | 13,74 | ν'β = 6,111 | 4,71 | 4,71 |
| γ | 5 | 13,45 | ν'γ = 5,070 | 3,87 | 3,90 |
| μ | 4 | 13,21 | ν'μ = 4,042 | 2,72 | 2,78 |
| ν | 3 | 13,01 | ν'ν = 3,022 | 2,30 | 2,32 |
| o | 2 | 12,80 | ν'o = 2,002 | » | » |

### Tableau XVI.

Ellipse $a = 10$, $b = 15$ (*fig.* 4). Hyperbole B'B.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 10 | 7,45 | BB' = 10,095 | 7,17 | 7,10 |
| C | 8 | 7,02 | B'C = 8,047 | 5,40 | 5,38 |
| D | 6 | 6,68 | B'D = 6,019 | 3,74 | 3,79 |

### Tableau XVII.

Ellipse $a = 10$, $b = 15$ (*fig.* 4). Hyperbole E'E.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| E | 8 | 8,46 | E'E = 8,178 | 6,11 | 6,04 |
| F | 6 | 7,90 | E'F = 6,066 | 4,23 | 4,29 |
| G | 4 | 7,80 | E'G = 4,017 | 3,51 | 3,52 |

### Tableau XVIII.

Ellipse $a = 10$, $b = 15$ (*fig.* 4). Hyperbole B'B.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| H | 6 | 9,16 | H'H = 6,074 | 4,60 | 4,68 |
| K | 4 | 8,80 | H'K = 4,040 | 2,75 | 2,72 |
| L | 2 | 8,58 | H'L = 2,001 | » | 1,54 |

### Tableau XIX.

Ellipse $a = 15$, $b = 10$ (*fig.* 5). Hyperbole BB'.

| Points étudiés. | Ordonnées. | Abscisses. | $h$. | I mesuré. | I calculé. |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 8 | 9 | B'B = 8,297 | 6,14 | 6,13 |
| D | 6 | 8,19 | B'D = 6,144 | 4,31 | 4,37 |
| E | 4 | 7,56 | B'D = 4,044 | 2,77 | 2,79 |

### Tableau XX.

Ellipse $a = 15$, $b = 10$ (*fig.* 5). Hyperbole C'C.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 6 | 12 | C'C = 6,299 | 4,89 | 4,85 |
| G | 4 | 11,08 | C'G = 4,098 | 2,77 | 2,75 |
| F | 2 | 10,49 | C'F = 2,088 | 1,70 | 1,76 |

### Tableau XXI.

Cercle de rayon 12,5 (*fig.* 2). Hyperbole AA'.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 7,50 | AA' = 10,179 | 7,15 | 7,13 |
| B | 8 | 6,94 | A'B = 8,013 | 5,39 | 5,33 |
| C | 6 | 6,49 | A'C = 6,053 | 3,82 | 3,80 |
| D | 4 | 6,09 | A'D = 4,014 | » | » |

### Tableau XXII.

Cercle de rayon 12,5 (*fig.* 2). Hyperbole G'G.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| G | 8 | 9,59 | G'G = 8,179 | 6,00 | 6,04 |
| F | 6 | 8,97 | G'F = 6,104 | 4,25 | 4,29 |
| D | 4 | 8,48 | G'D = 4,045 | 2,78 | 2,79 |

### Tableau XXIII.

Cercle de rayon 12,5 (*fig.* 2). Hyperbole G'G.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| H | 6 | 10,96 | H'H = 6,119 | 4,77 | 4,72 |
| K | 4 | 10,38 | H'K = 4,043 | 2,75 | 2,79 |
| L | 2 | 10,01 | H'L = 2,034 | 1,07 | 1,00 |

### Tableau XXIV.

Cercle de rayon 10 (*fig.* 3). Hyperbole AA'.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 8 | 6 | A'B = 8,140 | 6,08 | 6,02 |
| B | 6 | 5,46 | A'B = 6,071 | 4,23 | 4,28 |
| C | 4 | 5,04 | A'C = 4,027 | 2,71 | 2,78 |

TABLEAU XXV.

Cercle de rayon 10 (*fig.* 3). Hyperbole EE'.

| Points étudiés. | Ordonnées. | Abscisses. | | I mesuré. | I calculé. |
|---|---|---|---|---|---|
| E | 6 | » | EE' | 4,75 | 4,71 |
| F | 4 | » | E'F | 2,67 | 2,71 |
| G | 2 | » | E'G | » | » |

Ainsi donc les lignes où se retrouve la loi de distribution donnée par la formule

$$I = A(a^h - a^{-h}) \tag{1}$$

sont bien les hyperboles que j'ai définies plus haut. On sait que la formule (1) représente la loi de distribution du magnétisme sur un barreau mince et de longueur finie; elle a été donnée par Biot à la suite des recherches expérimentales de Coulomb.

Depuis, Green l'a retrouvée comme conséquence de sa théorie mathématique, et les récents travaux de M. Jamin la rendent définitive.

Je me propose maintenant de rechercher les lois qui président aux variations de A et $a$, à mesure que l'on s'éloigne des axes des aimants. On voit déjà par les nombres des tableaux précédents que $a$ est d'autant plus grand que le filet est plus long, et A est au contraire d'autant plus petit; mais l'expérience prouve que ces deux coefficients tendent vers une limite quand la longueur de l'aimant croît indéfiniment, et M. Jamin en a récemment donné la valeur pour des aciers déterminés.

A mesure que le filet hyperbolique diminue, $a$ diminue et tend vers l'unité et A vers l'infini. On sait que M. Jamin, en augmentant l'épaisseur des aimants, a pu en construire dans lesquels $a$ atteignait une valeur égale à l'unité pour des longueurs finies de l'aimant : c'est l'aimant normal ou mieux l'aimant saturé.

Maintenant que l'on sait dans quel sens varient A et $a$, je me propose d'établir les lois précises de leurs variations dans les aimants elliptiques et circulaires.

*Lois des variations des coefficients* A *et* $a$.

1° Les tensions I du magnétisme libre aux extrémités de chaque filet hyperbolique sont données par la formule

$$I_1 = \frac{L}{\frac{\pi}{2}} \text{arc tang} \frac{h_1}{k} = A(a^{h_1} - a^{-h_1}).$$

Dans cette formule, $h_1$ est la longueur de l'arc d'hyperbole rectifié, mesuré depuis la ceinture moyenne jusqu'au bord de la plaque. L représente la tension à l'extrémité d'un filet de longueur infinie; dans toutes mes expériences, cette constante s'est trouvée égale à 17,1011.

Quant au coefficient $k$, il n'est absolument que *pour une plaque donnée;* mais ses variations sont si faibles avec les plaques que j'ai étudiées, qu'il est impossible d'en donner la loi.

C'est précisément une question dont je m'occupe : en étudiant des aimants dont les dimensions transversales prennent des valeurs de plus en plus petites, j'ai déjà reconnu que $k$ diminuait en même temps que les dimensions tranversales des aimants.

Ainsi la formule

$$(\alpha) \qquad I_1 = \frac{L}{\frac{\pi}{2}} \text{arc tang} \frac{h_1}{k},$$

qui convient parfaitement pour une plaque unique, devient empirique quand on essaye de l'étendre à des plaques de formes et de dimensions diverses.

Pour les plaques dont il est question dans ce Mémoire, $k$ oscille très-peu autour de la moyenne 13,213.

2° Si l'on mesure les aires comprises entre les courbes $I = A(a^h - a^{-h})$ et les axes de coordonnées, ces aires

$$\int_0^{h_1} A(a^h - a^{-h}) = \frac{A}{L_a}(a^{h_1} + a^{-h_1} - 2)$$

représentent la totalité du magnétisme libre répandu sur chaque filet; si, dis-je, on mesure ces aires, on trouve qu'elles sont toujours propor-

tionnelles aux carrés des tensions I du magnétisme libre à l'extrémité de chaque filet, ce qui conduit à la formule

$$(\beta) \qquad \frac{A}{L_a}(a^{h_1} + a^{-h_1} - 2) = CI_1^2 = CA^2(a^{h_1} - a^{-h_1})^2.$$

Dans toutes mes expériences, C a conservé la valeur 0,6491, de sorte que l'on a finalement

$$\frac{a^{h_1} + a^{-h_1} - 2}{L_a} = 0,6491 + A(a^{h_1} - a^{-h_1}).$$

Les deux formules ($\alpha$) et ($\beta$) déterminent complétement les valeurs de A et $a$ qui correspondent à un filet quelconque de longueur $h_1$.

Ici une remarque est nécessaire; on a vu que dans le cercle la loi de distribution sur un rayon quelconque est donnée par la formule

$$I = A(a^{\rho} - a^{-\rho});$$

il semblerait donc que les rayons obéiraient à la loi de distribution trouvée par Coulomb, et qu'il n'y aurait pas de raison pour donner aux hyperboles qui viennent d'être étudiées le nom de *filets magnétiques* plutôt que de ne pas étendre aussi cette dénomination aux diamètres des cercles.

Il est facile de voir qu'il existe une différence capitale entre les lois de distribution sur les hyperboles en question, et que je nommerai désormais lignes *homomagnétiques*, et les diamètres.

En effet, sur tous les diamètres des cercles, $a$ est constant et A ne varie que suivant une loi qui n'est pas la même que celles des variations de A sur les hyperboles, mais qui s'en déduit. Les hyperboles homomagnétiques jouissent d'une propriété essentielle, caractéristique des filets magnétiques : c'est que la totalité du magnétisme répandu sur chacune d'elles est pour un même acier proportionnelle au carré de la tension existant à son extrémité.

Cette loi est très-importante : j'ai tout lieu d'espérer de pouvoir l'étendre aux autres aimants, et elle ne se retrouve nullement sur les diamètres des cercles aimantés.

Cela posé, je donne deux séries de tableaux : dans la première, formée

des cinq premiers, on trouve la vérification de la formule

$$I_1 = \frac{L}{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{h_1}{k}.$$

Dans les cinq tableaux qui suivent, se trouvent les aires calculées par la formule

$$(\beta) \qquad \text{aire} = 0,6491\, I_1^2,$$

et en regard les aires données par la formule

$$(\gamma) \qquad \text{aire} = \frac{A}{L_a}\left(a^{h_1} + a^{-h_1} - 2\right).$$

Cercle de rayon 15.

| Longueur de l'hyperbole rectifiée. | Abscisse de l'extrémité de l'hyperbole. | Ordonnée de l'extrémité de l'hyperbole. | Tensions extrêmes mesurées. | Tensions extrêmes calculées. |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 0 | 15 | 9,25 | 9,25 |
| 14,094 | 5,38 | 14 | 8,91 | 8,90 |
| 12,195 | 9 | 12 | 8,08 | 8,05 |
| 10,219 | 6,18 | 10 | 7,16 | 7,16 |
| 8,184 | 12,68 | 8 | 6,05 | 6,03 |
| 6,111 | 13,74 | 6 | 4,71 | 4,71 |

Ellipse $a = 10$, $b = 15$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 0 | 15 | 9,31 | 9,25 |
| 10,095 | 7,45 | 10 | 7,17 | 7,10 |
| 6,074 | 9,16 | 6 | 4,60 | 4,58 |

Ellipse $a = 15$, $b = 10$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0 | 10 | 7,00 | 7,05 |
| 8,297 | 9 | 8 | 6,14 | 6,10 |
| 6,299 | 12 | 6 | 4,89 | 4,83 |

Cercle de rayon 10.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 0 | 10 | 7,11 | 7,05 |
| 8,140 | 6 | 8 | 6,08 | 6,01 |
| 6,105 | 8 | 6 | 4,75 | 4,71 |

Cercle de rayon 12,5.

| Longueur de l'hyperbole rectifiée. | Abscisse de l'extrémité de l'hyperbole. | Ordonnée de l'extrémité de l'hyperbole. | Tensions extrêmes mesurées. | Tensions extrêmes calculées. |
|---|---|---|---|---|
| 12,5 | 0 | 12,5 | 8,28 | 8,22 |
| 10,179 | 7,50 | 10 | 7,15 | 7,14 |
| 8,179 | 9,59 | 8 | 6,09 | 6,00 |
| 6,119 | 10,96 | 6 | 4,77 | 4,71 |

Cercle de rayon 15.

| Longueur de l'hyperbole rectifiée. | Aires d'après la formule $\beta$. | Aires d'après la formule $\gamma$. |
|---|---|---|
| 15 | 55,55 | 55,55 |
| 14,094 | 51,84 | 51,41 |
| 12,195 | 42,42 | 42,37 |
| 10,219 | 33,03 | 33,32 |
| 8,184 | 23,66 | 23,75 |
| 6,111 | 14,39 | 14,99 |

Ellipse $a = 10$, $b = 15$.

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 55,65 | 56,26 |
| 10,095 | 32,91 | 33,00 |
| 6,074 | 14,01 | 13,73 |

Ellipse $a = 15$, $b = 10$.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 32,10 | 31,80 |
| 8,297 | 24,22 | 24,15 |
| 6,299 | 15,11 | 15,14 |

Cercle de rayon 12,1.

| | | |
|---|---|---|
| 12,5 | 44,23 | 44,50 |
| 10,179 | 33,39 | 33,19 |
| 8,179 | 23,42 | 23,36 |
| 6,119 | 14,41 | 14,99 |

Cercle de rayon 10.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 33,00 | 33,81 |
| 8 140 | 24,29 | 24,14 |
| 6,105 | 14,39 | 14,99 |

*Des lignes isodynamiques dans les aimants circulaires et elliptiques.*

On vient de voir dans les pages précédentes que, pour résoudre d'une façon simple le problème de la distribution du magnétisme libre dans les aimants circulaires et elliptiques, il a suffi d'introduire la considération de *coordonnées curvilignes* hyperboliques, que je nomme *lignes homomagnétiques*.

Mais ce n'est pas là, à beaucoup près, le seul avantage de ces lignes; elles donnent en outre, avec la plus grande facilité, les équations des courbes isodynamiques, qu'il ne serait peut-être pas possible d'obtenir par toute autre considération.

En effet, si l'on cherche à représenter par une équation algébrique les lignes isodynamiques de l'aimant circulaire, on est arrêté par des difficultés aussi grandes que celles qui se présentent quand on cherche une loi simple exprimant la distribution du magnétisme, suivant des ordonnées rectilignes perpendiculaires à la ligne neutre; mais, si l'on vient à prendre pour ordonnées curvilignes les hyperboles définies plus haut, le problème se réduit à une simplicité inespérée.

En effet, sur les cercles et les ellipses les lignes isodynamiques sont les courbes transcendantes représentées par l'équation

$$(p) \qquad \frac{x^2}{r^2+b^2}+\frac{h^2}{b^2}=1.$$

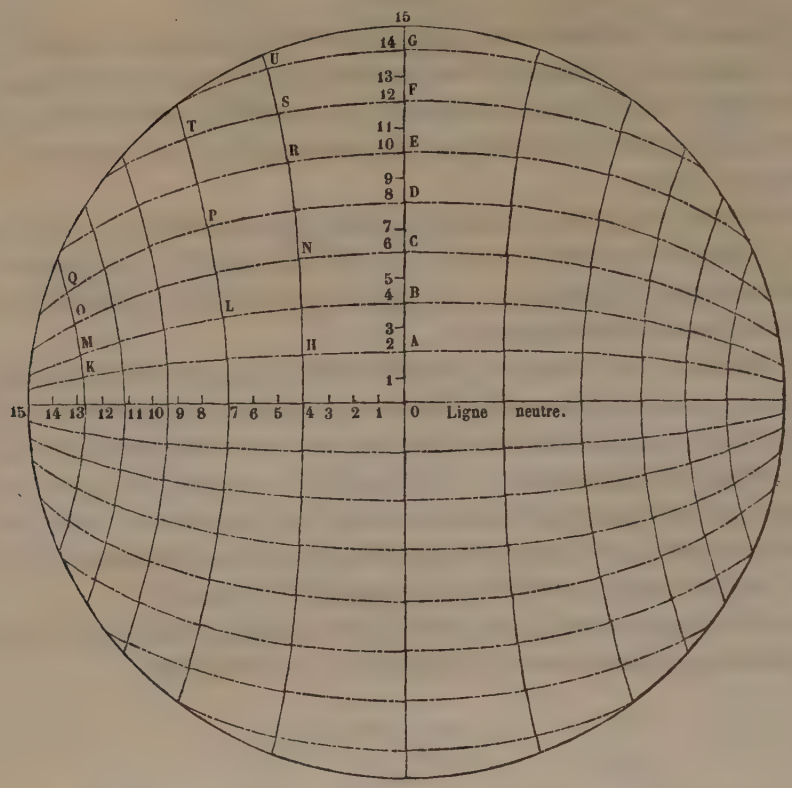
$x$ est une abscisse rectiligne ordinaire comptée parallèlement à la ligne neutre, $h$ est une ordonnée curviligne comptée sur l'hyperbole homomagnétique, depuis le point étudié jusqu'à la ceinture moyenne, $r$ est, dans le cas du cercle, le rayon et dans les ellipses la moitié de la ligne neutre, $b$ est la distance du centre de la plaque au point où la courbe isomagnétique coupe l'axe de l'aimant perpendiculaire à la ligne neutre.

Je termine ce travail en y ajoutant :

1° La *fig.* 6, figurant un cercle de 30 centimètres de diamètre, où la ligne neutre est indiquée en toutes lettres, les hyperboles en traits pleins et les lignes isodynamiques en ponctué mixte.

2° Un tableau contenant les nombres correspondant à dix-neuf points pris sur les régions les plus diverses d'un quart de l'aimant, ces points

Fig. 6.




sont marqués par des lettres sur la figure. En regard de chacune de ces lettres se trouvent les nombres qui donnent les tensions magnétiques d'une part, et de l'autre le résultat de la substitution des coordonnées de chacun de ces points dans le premier membre de l'équation

$$(p) \qquad \frac{x^2}{r^2+b^2}+\frac{h^2}{b^2}=1.$$

Ce résultat diffère assez peu de l'unité pour que les différences puissent rentrer dans les erreurs dues à l'expérience et au calcul toujours approximatif des coordonnées curvilignes.

Enfin, j'ai réuni dans une accolade les points qui se trouvent sur une même ligne isomagnétique.

| Tensions. | Points étudiés. | Abscisses de ces points. | Ordonnées hyperboliques de ces points. | Résultats de la substitution de $x$ et de $h$ dans le premier membre de l'équation ($p$). |
|---|---|---|---|---|
| 0,75 | A | 0 | 2 | 1,000 |
| 0,77 | H | 4,000 | 1,892 | 0,959 |
| 0,73 | K | 12,802 | 1,101 | 1,018 |
| 1,54 | B | 0 | 4 | 1,000 |
| 1,60 | L | 7,263 | 3,415 | 0,946 |
| 1,60 | M | 13,005 | 2,001 | 0,975 |
| 2,49 | C | 0 | 6 | 1,000 |
| 2,58 | N | 4,237 | 5,712 | 0,974 |
| 2,51 | O | 13,270 | 3,218 | 0,963 |
| 3,51 | D | 0 | 8 | 1,000 |
| 3,53 | P | 7,756 | 7,129 | 1,002 |
| 3,51 | Q | 13,404 | 4,554 | 0,945 |
| 4,80 | E | 0 | 10 | 1,000 |
| 4,90 | R | 4,451 | 9,713 | 1,006 |
| 6,25 | F | 0 | 12 | 1,000 |
| 6,30 | S | 4,898 | 11,514 | 0,985 |
| 6,31 | T | 8,537 | 10,580 | 0,974 |
| 8,12 | G | 0 | 14 | 1,000 |
| 8,12 | U | 5,255 | 13,412 | 0,983 |

## CONCLUSION.

Le problème de la distribution du magnétisme libre dans les aimants circulaires et elliptiques est résolu par les lois dont la recherche fait l'objet de cette étude.

Cependant je ne puis quitter la question qui vient de m'occuper sans remarquer que la marche que j'ai suivie peut être susceptible de généralisation. On peut, pour d'autres aimants que les circulaires et les elliptiques, rechercher les lignes homomagnétiques, et trouver l'explication de ces phénomènes de distribution si peu étudiés et connus sous le nom d'*influence des bords et des angles*.

Une remarque analogue peut être faite au sujet des lignes isodynamiques : remarquons que, dans le cas des ellipses, ces courbes seraient

toutes des ellipses homofocales, ayant pour foyers les deux extrémités de la ligne neutre, si l'ordonnée hyperbolique $h$ était une ordonnée rectiligne $y$.

Ainsi une relation intime existe entre la forme de la courbe algébrique qui termine l'aimant elliptique et celle des courbes transcendantes qui sont les lignes isodynamiques, à la condition de remplacer les ordonnées rectilignes par des ordonnées curvilignes comptées sur les hyperboles homomagnétiques.

Il ne serait peut-être pas téméraire d'espérer pouvoir résoudre, par des considérations analogues, le problème de la distribution du magnétisme sur des plaques d'acier, terminées par des courbes de formes diverses, mais géométriquement définies.

SUR LES

# PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES GAUCHES

ET LE

## MOUVEMENT HÉLICOÏDAL D'UN CORPS SOLIDE,

PAR M. P. APPELL,

ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Depuis les travaux de Möbius sur les cubiques gauches, ces courbes ont été l'objet de nombreuses recherches, dont les plus importantes sont celles de M. Chasles et de M. Schröter. M. Chasles a montré (*Journal de Liouville*, 1857) qu'il existe, par rapport aux cubiques gauches, un système de pôles et de plans polaires, de même qu'il existe, par rapport aux coniques, un système de pôles et de polaires. La démonstration des propriétés de ce système de pôles et de plans polaires fait l'objet de la première partie de notre travail. Cette démonstration nouvelle repose sur ce fait que les cubiques gauches sont des courbes unicursales et sur l'emploi d'une relation involutive entre trois séries d'éléments variables $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, définie par une équation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Pour montrer l'analogie entre ces propriétés des cubiques gauches et les propriétés des pôles et polaires dans les coniques, nous indiquerons une démonstration de ces dernières propriétés, fondée également sur ce fait que les coniques sont des courbes unicursales et sur l'emploi de l'involution du deuxième ordre entre deux séries d'éléments $\lambda_1$, $\lambda_2$, définie par une équation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0.$$

La comparaison entre ces deux démonstrations nous fera acquérir la notion d'une relation segmentaire entre deux groupes de trois points en ligne droite, qui semble devoir jouer, dans la géométrie des cubiques gauches, un rôle analogue à celui que joue dans la géométrie des coniques la relation segmentaire appelée *division harmonique*, entre deux couples de points en ligne droite.

2. Le système des pôles et des plans polaires, par rapport à une cubique gauche, a des propriétés identiques aux propriétés du système des plans et de leurs foyers, dans le déplacement d'un corps solide entièrement libre, propriétés qui ont été établies par M. Chasles (*Comptes rendus*, 1843). Cette identité de propriétés conduit à deux problèmes : le premier consiste à déterminer les cubiques gauches correspondant à un mouvement hélicoïdal donné, le second à déterminer le mouvement hélicoïdal correspondant à une cubique gauche donnée. La résolution de ces deux problèmes fait l'objet principal de la deuxième Partie de notre travail. Nous indiquerons de plus, dans cette deuxième Partie, quelques propriétés des cubiques gauches qui nous semblent nouvelles.

---

# PREMIÈRE PARTIE.

3. Comme nous l'avons dit, la démonstration des propriétés indiquées repose sur l'emploi d'une relation involutive du troisième ordre entre trois séries d'éléments, relation définie par une équation de la forme

$$(1) \qquad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Nous montrerons d'abord comment on peut déduire les propriétés des pôles et des polaires dans les coniques de la considération de l'involution du second ordre entre deux séries d'éléments, définie par une équation de la forme

$$(2) \qquad A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0$$

et nous suivrons ensuite pour les cubiques gauches une marche tout à fait analogue.

Donnons d'abord une interprétation géométrique de ces deux relations (1) et (2). Considérons une droite $Ox$ et supposons que les paramètres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de la relation (2) représentent les abscisses de deux points $M_1$, $M_2$ de la droite; sur la droite $Ox$ il y a alors deux points doubles $M'$ et $M''$, dont les abscisses $\lambda'$ et $\lambda''$ sont les racines de l'équation

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

d'où

$$\lambda' + \lambda'' = -\frac{2B}{A}, \quad \lambda'\lambda'' = \frac{C}{A}.$$

La relation (2) peut s'écrire en remplaçant $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$ par leurs valeurs

$$2\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda' + \lambda'') + 2\lambda'\lambda'' = 0,$$

ou

$$(\lambda_1 - \lambda')(\lambda_2 - \lambda'') + (\lambda_1 - \lambda'')(\lambda_2 - \lambda') = 0,$$

ou encore

$$M_1M'.M_2M'' + M_1M''.M_2M' = 0,$$

relation qui montre que les deux points $M_1$ et $M_2$ sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points $M'$, $M''$. Cette signification géométrique de la relation (2) est bien connue; nous ne l'avons établie ici que pour montrer d'une manière analogue la signification géométrique de la relation (1). Considérons, en effet, une droite $Ox$ et supposons que $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ représentent les abscisses de trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$ de la droite. Sur la droite $Ox$ il y a alors trois points triples, $M'$, $M''$, $M'''$, dont les abscisses $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ sont les racines de l'équation

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3C\lambda + D = 0$$

d'où

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = -\frac{3B}{A}, \quad \lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda' = \frac{3C}{A}, \quad \lambda'\lambda''\lambda''' = -\frac{D}{A}.$$

La relation (1) peut alors s'écrire

$$3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)(\lambda' + \lambda'' + \lambda''')$$
$$+ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda') - 3\lambda'\lambda''\lambda''' = 0,$$

ou bien

$$(\lambda_1-\lambda')(\lambda_2-\lambda'')(\lambda_3-\lambda''')+(\lambda_1-\lambda'')(\lambda_2-\lambda''')(\lambda_3-\lambda')$$
$$+(\lambda_1-\lambda''')(\lambda_2-\lambda')(\lambda_3-\lambda'')=0$$

et enfin

$$(3)\quad M_1M'.M_2M''.M_3M'''+M_1M''.M_2M'''.M_3M'+M_1M'''.M_2M'.M_3M''=0,$$

ce qui donne la signification géométrique de la relation (1).

Il semble que cette relation géométrique entre deux groupes de trois points doive jouer dans la géométrie des cubiques gauches le même rôle que la division harmonique dans la géométrie des coniques. Remarquons la forme particulière que prend la relation (3) quand deux des points $M_1$, $M_2$, $M_3$ coïncident. Supposons que $M_3$ coïncide avec $M_2$: la relation (3) s'écrit alors

$$\frac{M_1M'}{M_2M'}+\frac{M_1M''}{M_2M''}+\frac{M_1M'''}{M_2M'''}=0;$$

mais

$$M_1M'=M_1M_2+M_2M',$$
$$M_1M''=M_1M_2+M_2M'',$$
$$M_1M'''=M_1M_2+M_2M'''.$$

En substituant à la place de $M_1M'$, $M_1M''$, $M_1M'''$ ces valeurs, on voit que l'on a

$$\frac{3}{M_2M_1}=\frac{1}{M_2M'}+\frac{1}{M_2M''}+\frac{1}{M_2M'''}.$$

Le point $M_1$ est donc alors le centre des moyennes harmoniques du point $M_2$ par rapport aux points triples $M'$, $M''$, $M'''$.

Si trois points variables d'une droite $M_1$, $M_2$, $M_3$ vérifient la relation (1), ou, ce qui revient au même, la relation (3), nous dirons que ces trois points forment une involution du troisième ordre ayant les points $M'$, $M''$, $M'''$ pour points triples. Dans une pareille division, on peut choisir arbitrairement deux des points, $M_2$, $M_3$, par exemple; le troisième point $M_1$ est alors déterminé; il y a de plus réciprocité entre les trois points homologues $M_1$, $M_2$, $M_3$. Nous verrons plus loin quelques autres propriétés de cette involution du troisième ordre.

4. Voyons maintenant comment on pourrait établir la théorie des pôles et des polaires dans les coniques. Une courbe du second ordre est une courbe unicursale; en d'autres termes, on peut exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre par des équations de la forme

$$x = \frac{a\lambda^2 + b\lambda + c}{\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma}, \quad y = \frac{a'\lambda^2 + b'\lambda + c'}{\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma}.$$

A chaque valeur de $\lambda$ correspond un seul point de la courbe, et à chaque point de la courbe correspond une seule valeur de $\lambda$. Nous dirons que deux séries de points $M_1$, $M_2$ de la conique sont en involution si à un point $M_1$ de la première série correspond un seul point $M_2$ de la deuxième, et s'il y a réciprocité. Soient $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les valeurs du paramètre correspondant aux points $M_1$, $M_2$; il y a évidemment entre ces deux paramètres une équation de la forme

$$(2) \qquad A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0.$$

Il est clair qu'en joignant les points homologues $M_1$, $M_2$ de l'involution à un point fixe O de la conique, on forme autour de ce point deux faisceaux de droites $OM_1$, $OM_2$ en involution. Une pareille involution de points sur une conique est déterminée par deux couples de points homologues, car la relation (2) ne contient que deux constantes arbitraires. Nous dirons de même que deux séries de droites tangentes à une conique forment une involution, quand à une tangente de la première série correspond une seule tangente de la deuxième, et qu'il y a réciprocité. Les points d'intersection des tangentes homologues avec une tangente fixe de la conique forment sur cette droite une involution. Une involution de tangentes est déterminée par deux couples de tangentes homologues. Il est évident que les tangentes à une conique aux points homologues de deux séries de points en involution sur la conique sont des tangentes en involution, et, réciproquement, que les points de contact des tangentes homologues de deux séries de tangentes en involution sont des points en involution.

Les droites passant par un point fixe coupent une conique en deux séries de points en involution; et, comme une involution est déterminée par deux couples de points homologues, on voit que les droites joi-

gnant les points homologues de deux divisions en involution sur une conique passent par un point fixe. De même, les tangentes menées à une conique des différents points d'une droite fixe forment deux séries de tangentes en involution, et, réciproquement, les points d'intersection des droites homologues de deux séries de tangentes en involution sont sur une droite fixe.

De ce qui précède il résulte immédiatement que, si d'un point fixe P on mène des sécantes à une conique, et si l'on mène les tangentes aux deux points d'intersection avec la conique de chacune de ces sécantes, le lieu du point d'intersection de ces tangentes sera une droite, la droite des contacts des deux tangentes menées du point P à la conique; et, réciproquement, si de chaque point d'une droite fixe D on mène les deux tangentes à une conique, les droites joignant les deux points de contact passent par un point fixe, intersection des tangentes à la courbe aux points où elle est rencontrée par la droite D. Ces deux théorèmes renferment toute la théorie des pôles et des polaires. Nous allons établir pour les cubiques gauches deux théorèmes analogues.

5. Une cubique gauche est, comme on sait, l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant une génératrice commune. Une cubique gauche est une courbe unicursale, c'est-à-dire que les coordonnées d'un point de cette courbe peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre.

En effet, prenons deux points fixes A et B sur la courbe; un plan passant par la droite AB coupera la courbe en un seul point variable dont les coordonnées seront, par suite, des fonctions rationnelles du paramètre dont dépend la position du plan. Ces fonctions rationnelles sont évidemment du troisième degré :

$$x = \frac{a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d}{\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta},$$

$$y = \frac{a'\lambda^3 + b'\lambda^2 + c'\lambda + d'}{\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta},$$

$$z = \frac{a''\lambda^3 + b''\lambda^2 + c''\lambda + d''}{\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta}.$$

D'ailleurs toute courbe définie par des équations de cette forme est une cubique gauche; en effet, il est aisé de s'assurer qu'en joignant un

point fixe de cette courbe à tous les points de la courbe on forme un cône du second ordre.

Nous dirons que trois points variables $M_1$, $M_2$, $M_3$ de la cubique forment une involution du troisième ordre si, deux d'entre eux étant choisis arbitrairement, $M_1$ et $M_2$ par exemple, le troisième $M_3$ est parfaitement déterminé, et s'il y a réciprocité entre les trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$. Comme à un point M de la cubique il ne correspond qu'une valeur du paramètre $\lambda$, et qu'à une valeur de ce paramètre il ne correspond qu'un point de la courbe, on voit que les trois paramètres $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, correspondant à trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$ en involution, sont liés par une relation symétrique du premier degré par rapport à chacun d'eux. Cette relation est de la forme

$$(1) \qquad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Dans cette involution de trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$ sur une cubique, il existe trois points triples, c'est-à-dire trois points pouvant chacun être considérés comme trois points homologues confondus. En effet, si les trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$ sont confondus avec le point M, on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda :$$

donc

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3C\lambda + D = 0.$$

Les trois racines $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ de cette équation donneront les trois points triples $M'$, $M''$, $M'''$.

Il est essentiel de faire remarquer que les points triples sont trois points homologues de l'involution. On a, en effet,

$$\lambda'\lambda''\lambda''' = -\frac{D}{A}, \quad \lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda' = \frac{3C}{A}, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = -\frac{3B}{A};$$

d'où il résulte que l'on a aussi

$$A\lambda'\lambda''\lambda''' + B(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda') + C(\lambda' + \lambda'' + \lambda''') + D = 0.$$

Remarquons aussi qu'il existe deux points $N_1$ et $N_2$ sur la courbe dont l'homologue $N_3$ est indéterminée. Ce sont les deux points dont les paramètres $\mu_1$ et $\mu_2$ vérifient les deux équations

$$A\mu_1\mu_2 + B(\mu_1 + \mu_2) + C = 0,$$
$$B\mu_1\mu_2 + C(\mu_1 + \mu_2) + D = 0$$

ou l'équation unique

$$\mu^2(AC - B^2) + \mu(AD - BC) + BD - C^2 = 0.$$

On voit que, si les deux valeurs $\mu_1$ et $\mu_2$ sont imaginaires, les trois valeurs $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ correspondant aux points triples sont réelles. Si, au contraire, $\mu_1$ et $\mu_2$ sont réels, une seule des valeurs $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ est réelle.

6. Étant donnée sur la cubique une involution de trois points $M_1$, $M_2$, $M_3$, considérons une corde D de la cubique, c'est-à-dire une droite s'appuyant en deux points sur la courbe. Les plans $(DM_1)$, $(DM_2)$, $(DM_3)$ déterminés par la droite D et les trois points variables $M_1$, $M_2$, $M_3$ forment une involution du troisième ordre, ce qui signifie qu'ils déterminent sur une transversale quelconque des points $m_1$, $m_2$, $m_3$ formant sur cette transversale une involution du troisième ordre comme nous l'avons définie.

Soient $M'$, $M''$, $M'''$ les points triples de l'involution sur la cubique; les trois plans $(DM')$, $(DM'')$, $(DM''')$ coupent la transversale considérée en trois points $m'$, $m''$, $m'''$, qui sont les points triples de l'involution formée sur cette droite par les points $m_1$, $m_2$, $m_3$. On a donc la relation suivante :

$$m_1m'.m_2m''.m_3m''' + m_1m''.m_2m'''.m_3m' + m_1m'''.m_2m'.m_3m'' = 0.$$

On déduit de là la relation suivante entre les dièdres formés par les trois plans variables $(DM_1)$, $(DM_2)$, $(DM_3)$ et les trois plans fixes $(DM')$ $(DM'')$, $(DM''')$ :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin M_1M' \sin M_2M'' \sin M_3M''' + \sin M_1M'' \sin M_2M''' \sin M_3M' \\ &\qquad + \sin M_1M''' \sin M_2M' \sin M_3M'' = 0, \end{aligned}\right.$$

$\sin M_1M'$ désignant le sinus du dièdre des plans $(DM_1)$, $(DM')$,... et ainsi des autres.

Cela posé, remarquons que les trois points d'intersection $M_1$, $M_2$, $M_3$ d'une cubique avec un plan variable passant par un point fixe P forment sur la cubique une involution du troisième ordre. En effet, deux des points $M_1$ et $M_2$ étant choisis arbitrairement sur la courbe, le plan $(DM_1M_2)$ coupe la cubique en un troisième point $M_3$ parfaitement déterminé, et il y a réciprocité entre les points $M_1$, $M_2$, $M_3$. On pourrait

aussi vérifier que, en prenant l'équation d'un plan passant par un point fixe et cherchant les trois valeurs du paramètre correspondant aux trois points d'intersection de ce plan avec la cubique, on a entre ces valeurs une relation de la forme indiquée (1).

Un point triple d'une pareille involution est évidemment le point de contact d'un plan osculateur à la courbe mené par le point donné. Comme il y a trois points triples et que ces points triples sont trois points homologues de l'involution, on peut mener par le point P trois plans osculateurs à la courbe et les trois points de contact sont sur un plan passant par le point P. Voyons aussi quels sont les deux points $N_1$ et $N_2$ de cette involution dont l'homologue est indéterminé. Deux points $N_1$, $N_2$ étant choisis sur la courbe, leur homologue $N_3$ est indéterminé en même temps que le plan $PN_1N_2$. Or ce plan n'est indéterminé que si les trois points P, $N_1$, $N_2$ sont en ligne droite; donc, par un point P on peut toujours mener une droite $PN_1N_2$ s'appuyant en deux points $N_1$ et $N_2$, réels ou imaginaires, sur la courbe. Il résulte de plus, de la remarque faite à la fin du n° 5, que, si les deux points $N_1$ et $N_2$ sont imaginaires, les trois points de contact M′, M″, M‴ des plans osculateurs menés à la cubique par le point P sont réels, et que, si les deux points $N_1$ et $N_2$ sont réels, un seul des trois points M′, M″, M‴ est réel.

Réciproquement, étant donnée une division en involution sur une cubique les plans déterminés par trois points homologues $M_1$, $M_2$, $M_3$, passent par un point fixe P. Cela résulte de ce que la relation involutive (1) ne contient que trois constantes arbitraires, de sorte que la division est déterminée par trois ternes de points homologues. Alors, étant donnés trois ternes de points homologues et le point P d'intersection de leurs plans, l'involution qu'ils déterminent coïncide forcément avec celle que l'on obtient en coupant la courbe par des plans menés par le point P.

7. Nous dirons aussi que trois plans osculateurs variables $p_1$, $p_2$, $p_3$ d'une cubique gauche sont en involution si, deux d'entre eux étant choisis arbitrairement, $p_1$ et $p_2$ par exemple, le troisième $p_3$ est déterminé, et s'il y a réciprocité entre les trois plans $p_1$, $p_2$, $p_3$. Il y a alors entre les paramètres qui déterminent ces plans, c'est-à-dire entre les paramètres de leurs points de contact, une relation de la forme (1). Cela

revient à dire que les points de contact de trois plans osculateurs variables en involution sont trois points formant une involution, et que les plans osculateurs en trois points variables en involution sont des plans formant une involution, ce qui est évident. Dans une pareille involution de plans il y a trois plans triples $p'$, $p''$, $p'''$ qui sont en même temps trois plans homologues de l'involution. Il y a aussi deux plans osculateurs dont l'homologue est indéterminé.

Considérons une droite fixe D, intersection de deux plans osculateurs fixes de la cubique $q_1$, $q_2$. D'un point quelconque M de cette droite on ne peut mener qu'un plan $p$ osculateur à la cubique, différent des plans fixes $q_1$ et $q_2$. Donc trois plans homologues, $p_1$, $p_2$, $p_3$ de l'involution coupent la droite D en trois points variables, $M_1$, $M_2$, $M_3$ formant sur cette droite une involution du troisième ordre. Les points triples de cette involution sont les points M′, M″, M‴, où la droite D est coupée par les plans triples $p'$, $p''$, $p'''$. On a donc sur la droite D la relation segmentaire (3).

Les plans osculateurs menés à la cubique d'un point variable d'un plan fixe P sont trois plans en involution. En effet, deux plans osculateurs $p_1$ et $p_2$ étant choisis arbitrairement, leur droite d'intersection coupe le plan P en un point d'où l'on ne peut mesurer qu'un troisième plan $p_3$, osculateur à la cubique. De plus, il y a réciprocité entre les plans $p_1$, $p_2$, $p_3$. Les plans triples d'une pareille involution sont les plans osculateurs à la cubique aux trois points où elle est rencontrée par le plan P. Ces trois plans osculateurs se coupent en un point du plan P, car les plans triples sont trois plans homologues. Les deux plans dont l'homologue est indéterminé sont deux plans osculateurs, tels que leur droite d'intersection soit située dans le plan P; donc, étant donné un plan P, il y a toujours deux plans osculateurs se coupant suivant une droite du plan. Ces deux plans osculateurs sont réels si le plan P coupe la courbe en un seul point réel; imaginaires si le plan P coupe la courbe en trois points réels.

Étant donnés des plans osculateurs d'une cubique en involution, le lieu des points d'intersection de trois plans homologues est un plan. Cela résulte de ce qu'il suffit de trois ternes de plans homologues pour déterminer l'involution. Alors, étant donnés trois ternes de plans homologues et le plan P passant par leurs trois points d'intersection, l'invo-

lution que déterminent ces trois ternes de plans coïncide avec celle que l'on obtient en menant les plans osculateurs à la cubique des différents points du plan P.

8. Nous appelons *plan polaire* $p$ d'un point P le plan passant par les points de contact des trois plans osculateurs menés à la courbe par le point P. D'après ce qui précède, le plan polaire $p$ d'un point P passe par ce point. Nous appelons de même *pôle d'un plan* $p$ le point de concours P des plans osculateurs à la cubique, aux trois points où elle est rencontrée par le plan $p$. Le pôle d'un plan est sur ce plan. Il résulte des théorèmes précédemment démontrés que, si un plan variable passe par un point fixe P, son pôle décrit le plan polaire $p$ du point P; et que, si un point variable décrit un plan fixe $p$, son plan polaire passe par un point fixe P, pôle du plan $p$. Le plan polaire d'un point de la cubique est le plan osculateur en ce point, et le pôle d'un plan osculateur est le point de contact.

Soit une droite D, intersection de deux plans $p$ et $p'$; soit $\Delta$ la droite joignant les pôles P et P′ de ces plans. Si nous prenons un point M quelconque sur la droite D, comme ce point se trouve à la fois dans les deux plans $p$ et $p'$, son plan polaire passera à la fois par les pôles P et P′ de ces plans, il passera donc par la droite $\Delta$. Si, au contraire, nous prenons un plan quelconque passant par $\Delta$, ce plan, passant à la fois par les pôles P et P′ des deux plans $p$ et $p'$, aura son pôle sur l'intersection de ces plans, c'est-à-dire sur la droite D. Inversement, le plan polaire d'un point quelconque de $\Delta$ passe par D et le pôle d'un plan quelconque passant par D se trouve sur $\Delta$. Les deux droites D et $\Delta$ forment un couple de droites conjuguées par rapport à la cubique. Par exemple, une droite joignant deux points de la courbe et la droite intersection des deux plans osculateurs en ces points forment un couple de droites conjuguées.

Il est évident que, si une droite décrit un plan, sa conjuguée passe par le pôle du plan; et, réciproquement, si une droite passe par un point fixe, sa conjuguée est située dans le plan polaire du point.

9. Cherchons le lieu des pôles des plans parallèles à un plan fixe. De pareils plans peuvent être considérés comme passant par une même droite éloignée indéfiniment; le lieu de leurs pôles est donc une droite.

Appelons cette droite le *diamètre conjugué* de la direction commune des plans parallèles. Tous les diamètres sont parallèles. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, quelle que soit la manière dont un plan s'éloigne indéfiniment, le pôle du plan s'éloigne à l'infini, toujours dans la même direction. Le pôle d'un plan est le point d'intersection des plans osculateurs aux points où le plan coupe la cubique. Quelle que soit la manière dont un plan s'éloigne à l'infini, les plans osculateurs aux points où il coupe la cubique tendent vers trois plans limites qui sont les plans osculateurs à la cubique, aux points à l'infini de cette courbe. Ces trois plans osculateurs sont parallèles à une même direction, car le pôle d'un plan éloigné indéfiniment est à l'infini, et cette direction est celle suivant laquelle le pôle du plan considéré est allé à l'infini. Elle est donc indépendante de la manière dont le plan s'est éloigné indéfiniment. Par chaque point de l'espace il passe un diamètre conjugué du plan qui a son pôle en ce point.

Parmi tous les diamètres d'une cubique, il en est un seul qui est perpendiculaire à la direction de son plan conjugué : ce diamètre est l'axe de la cubique. Nous arrivons ainsi à ce résultat important qu'une cubique possède un axe. Nous verrons plus loin suivant quelles lois simples les éléments de la courbe sont distribués autour de cet axe.

**10.** Il peut arriver qu'une droite soit à elle-même sa conjuguée, c'est-à-dire qu'une droite D coïncide avec sa conjuguée $\Delta$. Cherchons les propriétés de ces droites. Pour qu'une droite soit à elle-même sa conjuguée, il suffit que le pôle d'un plan $p$ passant par la droite soit sur la droite. En effet, menons par la droite un autre plan quelconque; ce plan passant par le pôle du plan $p$ aura son pôle dans ce plan, mais il contient son pôle; ce pôle ne peut donc être situé que sur la droite donnée, intersection du plan $p$ et du plan mené par la droite. La droite est donc bien alors le lieu des pôles des plans qui la contiennent. Il résulte de ce qui précède que l'on peut dire aussi : pour qu'une droite soit à elle-même sa conjuguée, il suffit que le plan polaire d'un point de la droite passe par la droite. L'une quelconque de ces deux conditions est évidemment nécessaire.

Par chaque point de l'espace il passe donc une infinité de droites qui sont à elles-mêmes leurs conjuguées; toutes ces droites sont dans le plan

polaire du point. Dans chaque plan de l'espace il se trouve une infinité de droites conjuguées d'elles-mêmes : ces droites passent toutes par le pôle du plan.

Une droite qui rencontre deux droites conjuguées D et Δ est à elle-même sa conjuguée. En effet, le pôle du plan déterminé par la droite donnée et par la droite D, par exemple, est à l'intersection de ce plan avec la droite Δ, c'est-à-dire sur la droite donnée, ce qui suffit pour que celle-ci soit à elle-même sa conjuguée. Réciproquement, si une droite est conjuguée d'elle-même, et si elle rencontre une droite D, elle rencontre sa conjuguée Δ. En effet, le plan déterminé par la droite donnée et par la droite D a son pôle à la fois sur la droite donnée et sur Δ; donc ces deux droites se rencontrent. Il résulte de là que deux droites quelconques D, D′ et leurs conjuguées Δ, Δ′ sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde. En effet, considérons l'hyperboloïde défini sur les trois droites D, D′, Δ. Une génératrice de cette surface rencontrant les deux droites D et Δ est à elle-même sa conjuguée; elle rencontre aussi D′, et, comme elle est à elle-même sa conjuguée, elle rencontre Δ′ conjuguée de D′. La droite Δ′ est donc sur l'hyperboloïde.

Si une droite rencontre l'axe principal d'une cubique et lui est perpendiculaire, elle est à elle-même sa conjuguée. En effet, menons par une pareille droite un plan perpendiculaire à l'axe principal; le pôle de ce plan sera à l'intersection de ce plan avec l'axe, c'est-à-dire sur la droite considérée, ce qui suffit, comme on l'a vu, pour que celle-ci soit conjuguée. Il résulte de là que le plan polaire d'un point contient la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe. En particulier, le plan osculateur en un point d'une cubique gauche contient la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe de la courbe. Comme autre conséquence du théorème précédent, remarquons qu'un plan perpendiculaire à l'axe rencontre deux droites conjuguées D et Δ et l'axe lui-même en trois points en ligne droite. En effet, la droite joignant le point d'intersection du plan avec l'axe au point d'intersection avec la droite D est à elle-même sa conjuguée; elle rencontre donc Δ.

Cette conséquence peut encore s'énoncer de la manière suivante. Par deux droites conjuguées par rapport à une cubique D et Δ et l'axe de la courbe, on peut faire passer un paraboloïde dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe. Mais, dans un paraboloïde, trois généra-

trices d'un même système sont parallèles à un même plan; d'où il résulte que la perpendiculaire commune entre la droite D et l'axe est perpendiculaire à la droite $\Delta$; d'ailleurs cette droite rencontre $\Delta$. Donc la perpendiculaire commune à deux droites conjuguées rencontre l'axe et lui est perpendiculaire.

**11.** Cinq droites choisies arbitrairement peuvent toujours être considérées comme cinq droites conjuguées d'elles-mêmes par rapport à une certaine cubique gauche. En effet, nous verrons plus loin que l'équation du plan polaire d'un point par rapport à une cubique gauche contient cinq constantes arbitraires. En exprimant que cinq droites sont conjuguées d'elles-mêmes, on a cinq équations de condition qui déterminent ces cinq constantes. Les équations étant du premier degré, le système des pôles et des polaires est entièrement déterminé quand on connaît cinq droites conjuguées d'elles-mêmes.

Voyons comment on pourra construire géométriquement le pôle d'un plan, ou le plan polaire d'un point. Si, parmi les cinq droites données, nous en choisissons quatre, les deux droites $D_1$ et $\Delta_1$, qui rencontrent ces quatre droites, sont deux droites conjuguées par rapport à la cubique. Nous savons en effet que, si une droite rencontre une droite conjuguée d'elle-même, sa conjuguée la rencontre aussi; dans le cas présent, la droite $D_1$ rencontre quatre droites conjuguées d'elles-mêmes : sa conjuguée les rencontre donc aussi; elle coïncide donc avec $\Delta_1$. Si nous associons d'une autre manière quatre des cinq droites données, nous obtenons deux nouvelles droites conjuguées $D_2$ et $\Delta_2$. Pour avoir alors le plan polaire d'un point P, il suffit de mener par ce point deux droites, l'une rencontrant $D_1$ et $\Delta_1$, l'autre $D_2$ et $\Delta_2$. Le plan de ces deux droites est le plan polaire du point P.

Pour avoir le pôle d'un plan $p$, il suffit de mener deux droites de ce plan rencontrant, l'une $D_1$ et $\Delta_1$, l'autre $D_2$ et $\Delta_2$; ces deux droites se coupent en un point qui est le pôle du plan $p$. Du moment que l'on sait construire le plan polaire d'un point donné et le pôle d'un plan donné, on sait construire la conjuguée d'une droite donnée, ainsi que les droites conjuguées d'elles-mêmes.

Voyons enfin comment on déterminera l'axe de la cubique. Pour cela, considérons deux couples de droites conjuguées $D_1$ et $\Delta_1$, $D_2$ et $\Delta_2$.

La perpendiculaire commune $d_1$ à $D_1$ et $\Delta_1$ rencontre l'axe et lui est perpendiculaire; de même la perpendiculaire commune $d_2$ à $D_2$ et $\Delta_2$ rencontre normalement l'axe : cet axe est donc la perpendiculaire commune à $d_1$ et $d_2$.

12. Cherchons maintenant la forme de l'équation du plan polaire d'un point. Soient $x, y, z$ les coordonnées courantes; $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées du pôle; l'équation cherchée doit être linéaire en $x_1, y_1, z_1$, car, si l'on pose $x = a$, $y = b$, $z = c$, on doit avoir pour le lieu du point $(x_1 y_1 z_1)$ un plan, le plan polaire du point $(abc)$. L'équation la plus générale linéaire en $xyz$, $x_1 y_1 z_1$ est

$$\begin{aligned}&(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)x + (A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D'y)\\&\quad + (A''x_1 + B''y_1 + C''z_1 + D'')z + A'''x_1 + B'''y_1 + C'''z_1 + D''' = 0.\end{aligned}$$

Mais, comme le plan polaire d'un point contient ce point, cette équation doit être vérifiée par

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1;$$

il faut donc que l'on ait

$$\begin{gathered}A = 0, \quad B' = 0, \quad C'' = 0, \quad D''' = 0,\\ B + A' = 0, \quad C + A'' = 0, \quad C' + B'' = 0,\\ D + A''' = 0, \quad D' + B''' = 0, \quad D'' + C''' = 0.\end{gathered}$$

Posons

$$\begin{gathered}-B = A' = \gamma, \quad C = -A'' = \beta, \quad -C' = B'' = \alpha,\\ D = -A''' = a, \quad D' = -B''' = b, \quad D'' = -C''' = c;\end{gathered}$$

l'équation est alors

$$(\beta z_1 - \gamma y_1 + a)x + (\gamma x_1 - \alpha z_1 + b)y + (\alpha y_1 - \beta z_1 + c)z - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0,$$

ou bien

$$(\beta z_1 - \gamma y_1 + a)(x - x_1) + (\gamma x_1 - \alpha z_1 + b)(y - y_1) + (\alpha y_1 - \beta z_1 + c)(z - z_1) = 0.$$

Comme le lieu des pôles des plans passant par un point fixe est le plan polaire du point, il faut que l'équation soit symétrique en $xyz$, $x_1 y_1 z_1$, ce qui a lieu dans l'équation précédente. On peut, en effet, la

mettre sous la forme suivante, où la symétrie est en évidence :

$$\alpha(zy_1-yz_1)+\beta(xz_1-zx_1)+\gamma(yx_1-xy_1)+a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0.$$

Voyons ce que devient cette équation si l'on prend pour axe des $z$ un diamètre de la cubique, et pour plan des $xy$ le plan conjugué de ce diamètre. Il faut, dans ce cas, que l'équation du plan polaire d'un point de l'axe des $z$ se réduise à $z=z_1$. Or, en faisant dans l'équation $x_1=y_1=0$, elle devient

$$\beta z_1 x-\alpha z_1 y+ax+by+c(z-z_1)=0.$$

Pour que cette équation se réduise à $z=z_1$, il faut

$$\beta=\alpha=a=b=0.$$

L'équation du plan polaire du point $(x_1 y_1 z_1)$ devient alors

$$xy_1-yx_1-k(z-z_1)=0,$$

en posant

$$k=+\frac{c}{\gamma}.$$

Supposons, en particulier, que l'on ait pris pour axe des $z$ l'axe de la cubique. Les coordonnées sont alors rectangulaires. Soit

$$xy_1-yx_1-k(z-z_1)=0$$

l'équation du plan polaire du point $(x_1 y_1 z_1)$. La forme même de cette équation nous permet de faire une remarque très-importante. Cette équation, en effet, ne change pas si l'on transporte l'origine des coordonnées en un autre point de l'axe $Oz$, car il n'y entre que la différence $(z-z_1)$. Elle ne change pas non plus si l'on fait tourner le système des axes coordonnés autour de $Oz$, car alors $z$ et $z_1$ ne changent pas, et la différence $xy_1-yx_1$, que l'on peut considérer comme le moment d'un certaine force par rapport à $Oz$, reste invariable. Donc le système des pôles et des plans polaires par rapport à une cubique se superpose à lui-même si on le fait tourner autour de l'axe de la cubique ou glisser le long de cet axe; ou bien, en d'autres termes, le système des pôles et des plans polaires par rapport à une cubique reste le même si l'on fait tourner la cubique autour de l'axe et si on la transporte parallèlement à cet axe.

13. Il résulte de là que, pour étudier la position des plans polaires des différents points de l'espace, il suffit de voir comment varient les plans polaires des différents points d'une perpendiculaire à l'axe, perpendiculaire que nous pouvons toujours supposer être l'axe des $x$. Cherchons l'équation du plan polaire d'un point de l'axe des $x$ ayant pour coordonnées

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad x_1 = x_0.$$

Cette équation est

$$yx_0 + kz = 0.$$

Elle montre que le plan polaire passe par l'axe $Ox$, ce que nous savions déjà, et que l'axe de ce plan fait avec l'axe de la cubique $Oz$ un angle $\varepsilon$ donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{x_0}{k}.$$

La tangente de l'angle que fait l'axe du plan polaire d'un point avec l'axe de la cubique est donc proportionnelle à la distance de ce point à l'axe. En particulier, la tangente de l'axe du plan osculateur à la cubique en un point avec l'axe de la courbe est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe.

D'après ce que nous avons vu, si l'on prend pour axes de coordonnées un diamètre et son plan conjugué, l'équation du plan polaire conserve la forme

$$xy_1 - yx_1 - k'(z - z_1) = 0.$$

Voyons quelle relation il y a entre ce paramètre $k'$ et le paramètre $k$, qui se rapporte à l'axe de la cubique. Pour cela transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

puis prenons pour nouveau plan des $xy$ le plan ayant son pôle en ce point, ce qui revient simplement à faire tourner l'axe des $y$ dans le nouveau plan des $zy$ d'un angle $\varepsilon$. Les formules de transformation sont

$$x = x' + x_0, \quad z = z' + y' \sin\varepsilon, \quad y = y' \cos\varepsilon.$$

En substituant dans l'équation

$$xy_1 - yx_1 - k(z - z_1) = 0,$$

nous avons

$$(x'y'_1 - y'x'_1)\cos\varepsilon + x_0(y'_1 - y')\cos\varepsilon - k(z' - z'_1) + k(y'_1 - y)\sin\varepsilon = 0.$$

Mais $\tang\varepsilon = -\frac{x_0}{k}$; le terme $(y'_1 - y')$ disparaît, et il reste l'équation

$$x'y'_1 - y'x'_1 - \frac{k}{\cos\varepsilon}(z' - z'_1) = 0.$$

On voit donc que l'on a

$$k' = \frac{k}{\cos\varepsilon}.$$

Le paramètre $k'$ est le même pour tous les diamètres également distants de l'axe; il est le plus petit possible pour l'axe lui-même.

14. Cherchons les équations de la droite conjuguée d'une droite donnée. Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations d'une droite D. Pour avoir les équations de la droite conjuguée $\Delta$, il suffit de prendre l'équation du plan polaire du point

$$x = p, \quad y = q, \quad z = 0,$$

et celle du plan polaire du point

$$z = \infty, \quad \frac{x}{z} = a, \quad \frac{y}{z} = b.$$

On a ainsi les équations

$$qx - py - kz = 0, \quad bx - ay + k = 0$$

ou bien

$$x = \frac{-k}{bp - aq}(az + p), \quad y = \frac{-k}{bp - aq}(bz + q).$$

Appelons $r$ la distance de la droite D à l'axe, $\rho$ la distance de la droite $\Delta$ à l'axe; (DZ) l'angle de la droite D avec l'axe, ($\Delta$Z) l'angle de $\Delta$ avec l'axe. On a

$$\cos(\Delta Z) = \frac{pb - aq}{\sqrt{k^2(a^2 + b^2) + (pb - aq)^2}},$$

d'où

$$\tang^2(\Delta Z) = \frac{k^2(a^2+b^2)}{(pb-aq)^2}.$$

Mais on a aussi

$$r^2 = \frac{(pb-aq)^2}{a^2+b^2};$$

donc

$$\tang^2(\Delta Z) = \frac{k^2}{r^2} \quad \text{ou} \quad r\tang(\Delta Z) = k$$

et, par raison de symétrie, $\rho \tang(DZ) = k$.

Ainsi l'angle d'une droite avec l'axe ne dépend que de la distance de sa conjuguée à l'axe. En particulier, si les deux droites conjuguées sont rectangulaires, on a, parce qu'elles sont parallèles à un plan parallèle à l'axe,

$$\tang(DZ)\tang(AZ) = 1;$$

donc, pour de pareilles droites,

$$r\rho = k^2.$$

Ainsi le produit des distances à l'axe de deux droites conjuguées rectangulaires est constant.

Cherchons enfin la condition pour que la droite D soit conjuguée d'elle-même : cette condition s'obtiendra en exprimant que la droite D coïncide avec sa conjuguée $\Delta$. Elle est donc

$$pb - aq + k = 0;$$

dans ce cas, on a

$$r\tang(DZ) = k.$$

Le produit de la distance à l'axe d'une droite conjuguée d'elle-même par la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe est constant. Ce théorème s'applique en particulier aux tangentes de la cubique gauche qui sont toutes des droites conjuguées d'elles-mêmes.

# DEUXIÈME PARTIE.

15. Nous avons ainsi établi dans la première Partie les propriétés des pôles et des plans polaires $(P, p)$ par rapport à une cubique gauche. On connaît d'un autre côté (CHASLES, *Comptes rendus*, 1843) les propriétés d'un système de plans $p'$ et de points $P'$ obtenu en faisant correspondre à un point $P'$ d'un corps solide en mouvement le plan $p'$ mené par ce point perpendiculairement à sa vitesse, et à un plan $p'$ le point $P'$ dont la vitesse est perpendiculaire au plan. La comparaison des propriétés des systèmes $(P, p)$, $(P', p')$ montre qu'il y a identité complète entre ces propriétés. Nous sommes ainsi conduit à nous poser deux problèmes.

Le premier consiste, étant donné le mouvement hélicoïdal d'un corps solide, à déterminer les cubiques pour lesquelles le système des pôles et des plans polaires $(P, p)$ coïncide avec le système des points $P'$ et des plans $p'$ relatif à ce mouvement. Dans le deuxième nous nous proposons, étant donnée une cubique gauche, de déterminer un mouvement hélicoïdal tel que le système des points $P'$ et des plans $p'$ relatif à ce mouvement coïncide avec le système des pôles et des plans polaires $(P, p)$ par rapport à la cubique donnée.

16. Résolvons d'abord le premier problème :

*Étant donné un mouvement hélicoïdal, déterminer les cubiques gauches correspondantes.*

Prenons, pour simplifier, pour axe des $z$ l'axe du mouvement hélicoïdal. Soit V la vitesse de translation le long de cet axe, $\omega$ la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe. L'équation du plan $p'$, ayant son pôle $P'$ au point $(x_1 y_1 z_1)$, sera

$$xy_1 - yx_1 - \frac{V}{\omega}(z - z_1) = 0$$

ou

$$xy_1 - yx_1 - k(z - z_1) = 0,$$

en posant

$$k = \frac{V}{\omega}.$$

On voit que l'axe du mouvement hélicoïdal est l'axe principal de toutes les cubiques qui lui correspondent, et que le paramètre $k$, relatif à toutes ces cubiques, est le rapport $\frac{V}{\omega}$. Considérons une de ces cubiques : la vitesse d'un de ses points $(x, y, z)$ doit être normale au plan osculateur en ce point, la vitesse de ce point ayant pour projections $-\omega y$, $\omega x$, V, on doit avoir

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{-\omega y} = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{\omega x} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{V}.$$

Ces conditions peuvent se remplacer par les deux conditions suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} x\,dy - y\,dx + \frac{V}{\omega}\,dz = 0, \\ x\,d^2y - y\,d^2x + \frac{V}{\omega}\,d^2z = 0; \end{cases}$$

mais la deuxième de ces conditions est une conséquence de la première. Les cubiques cherchées doivent donc vérifier l'équation différentielle (1), et toutes les cubiques satisfaisant à cette équation différentielle répondent à la question. Remarquons en passant que toute courbe vérifiant l'équation différentielle (1) est telle que, si on la suppose liée à l'axe, la vitesse de chacun de ses points est normale au plan osculateur en ce point, et que chacune de ses tangentes est conjuguée d'elle-même. Chacune de ces courbes peut donc servir à définir le système des points et des plans $(P, p)$. Comme il n'y a qu'une équation différentielle, on peut choisir arbitrairement la projection d'une de ces courbes sur le plan des $xy$, l'équation (1) donne alors $z$ par une intégrale. L'expression $(x\,dy - y\,dx)$ représente le double de la différentielle de l'aire S décrite par le rayon vecteur allant de l'origine des coordonnées à un point variable de la projection de la courbe sur le plan des $xy$. L'équation (1) peut donc s'écrire

$$2\,dS + \frac{V}{\omega}\,dz = 0.$$

Donc, pour toutes ces courbes et en particulier pour les cubiques gauches, la variation de l'aire décrite par le rayon vecteur allant de l'origine des coordonnées à la projection d'un point variable de la

courbe sur le plan des $xy$ est égale à la variation de la hauteur de ce point multipliée par la constante $\frac{V}{2\omega}$.

Revenons maintenant à la recherche des cubiques gauches vérifiant l'équation différentielle (1). Remarquons que pour une cubique $x$, $y$, $z$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre variable $\lambda$. Donnons-nous les expressions de $x$ et $y$ en fonction de ce paramètre et cherchons à déterminer $z$ de manière à vérifier l'équation (1). Supposons les fractions rationnelles en $\lambda$ décomposées en fractions simples

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{A}{\lambda - a} + \dfrac{B}{\lambda - b} + \dfrac{C}{\lambda - c}, \\ y = y_0 + \dfrac{A'}{\lambda - a} + \dfrac{B'}{\lambda - b} + \dfrac{C'}{\lambda - c}, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\left[\frac{A}{(\lambda - a)^2} + \frac{B}{(\lambda - b)^2} + \frac{C}{(\lambda - c)^2}\right],$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = -\left[\frac{A'}{(\lambda - a)^2} + \frac{B'}{(\lambda - b)^2} + \frac{C'}{(\lambda - c)^2}\right];$$

on doit avoir

$$\frac{V}{\omega}\frac{dz}{d\lambda} = y_0\frac{dx}{d\lambda} - x_0\frac{dy}{d\lambda} + \left(\frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c}\right)\left[\frac{A'}{(\lambda - a)^2} + \frac{B'}{(\lambda - b)^2} + \frac{C'}{(\lambda - c)^2}\right]$$
$$- \left(\frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c}\right)\left[\frac{A}{(\lambda - a)^2} + \frac{B}{(\lambda - b)^2} + \frac{C}{(\lambda - c)^2}\right]$$

ou bien

$$\frac{V}{\omega}\frac{dz}{d\lambda} = y_0\frac{dx}{d\lambda} - x_0\frac{dy}{d\lambda} + \frac{(BC' - CB')}{(\lambda - b)^2(\lambda - c)^2}(c - b)$$
$$+ \frac{AB' - BA'}{(\lambda - a)^2(\lambda - b)^2}(b - a) + \frac{CA' - AC'}{(\lambda - c)^2(\lambda - a)^2}(a - c).$$

Décomposons les fractions rationnelles du deuxième membre en fractions simples

$$\frac{1}{(\lambda - a)^2(\lambda - b)^2} = \frac{1}{(a - b)^2}\left[\frac{1}{(\lambda - a)^2} + \frac{1}{(\lambda - b)^2}\right] - \frac{2}{(a - b)^3}\left(\frac{1}{\lambda - a} - \frac{1}{\lambda - b}\right).$$

La décomposition étant ainsi faite, on peut intégrer immédiatement;

mais, $z$ devant être fonction rationnelle de $\lambda$, les termes en $\frac{1}{\lambda - a}$, $\frac{1}{\lambda - b}$, $\frac{1}{\lambda - c}$ doivent avoir leurs coefficients nuls. En écrivant que ces coefficients sont nuls, on a les conditions

$$3) \qquad \frac{AB' - BA'}{(a-b)^2} = \frac{BC' - CB'}{(b-c)^2} = \frac{CA' - AC'}{(a-c)^2} = h.$$

Ces conditions étant supposées remplies, on a, en intégrant,

$$\frac{V}{\omega}(z - z_0) = xy_0 - yx_0 + \frac{AB' - BA'}{a-b}\left(\frac{1}{\lambda - a} + \frac{1}{\lambda - b}\right)$$
$$+ \frac{BC' - CB'}{b-c}\left(\frac{1}{\lambda - b} + \frac{1}{\lambda - c}\right) + \frac{CA' - AC'}{c-a}\left(\frac{1}{\lambda - c} + \frac{1}{\lambda - a}\right).$$

En appelant $h$ la valeur commune des rapports (3), on peut écrire l'expression de $z$ de la manière suivante :

$$(4) \qquad \frac{V}{\omega}(z - z_0) = xy_0 - yx_0 + h\left(\frac{c-b}{\lambda - a} + \frac{a-c}{\lambda - b} + \frac{b-a}{\lambda - c}\right).$$

On voit que $z$ est aussi une fraction rationnelle du troisième degré de $\lambda$ ayant même dénominateur que les deux fonctions rationnelles correspondant à $x$ et $y$. Les courbes ainsi déterminées sont donc des cubiques gauches satisfaisant à la question. Les trois équations (2) et (4) comprennent d'ailleurs toutes les cubiques cherchées. La forme même de l'équation (4) montre que, si une cubique satisfait à la question, toutes celles qu'on en déduit en la faisant tourner autour de l'axe ou en la faisant glisser le long de l'axe satisfont également à la question.

17. Reprenons les équations (3)

$$\frac{AB' - BA'}{(a-b)^2} = \frac{BC' - CB'}{(b-c)^2} = \frac{CA' - AC'}{(c-a)^2},$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe unicursale du troisième ordre, représentée par les équations (2), puisse être considérée comme la projection sur le plan des $xy$ d'une cubique gauche ayant son axe parallèle à l'axe $Oz$. Ces équations (3)

signifient que les trois points d'inflexion de la courbe du troisième ordre considérée sont à l'infini. En effet les équations de cette courbe sont

$$x = x_0 + \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$

$$y = y_0 + \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c}.$$

Pour $\lambda = a$ par exemple, on a un point à l'infini de la courbe. L'équation de l'asymptote correspondante est

$$A(y - y_0) - A'(x - x_0) = \frac{AB' - BA'}{a - b} + \frac{AC' - CA'}{a - c}.$$

Les valeurs du paramètre $\lambda$ correspondant aux points d'intersection de cette droite avec la courbe sont données par l'équation

$$\frac{AB' - BA'}{\lambda - b} + \frac{AC' - CA'}{\lambda - c} = \frac{AB' - BA'}{a - b} + \frac{AC' - CA'}{a - c}$$

ou

$$\frac{AB' - BA'}{(\lambda - b)(a - b)}(\lambda - a) + \frac{AC' - CA'}{(\lambda - c)(a - c)}(\lambda - a) = 0.$$

Cette équation admet la racine $\lambda = a$, ce qui devait arriver; elle admet une autre racine qui donne le point d'intersection de l'asymptote avec la courbe. Si le point à l'infini est point d'inflexion, ce point d'intersection doit lui-même être à l'infini, c'est-à-dire que cette autre racine de l'équation précédente doit aussi être $a$. Or c'est ce qu'exprime précisément la condition

$$\frac{AB' - BA'}{(a - b)^2} = \frac{CA' - AC'}{(a - c)^2}.$$

Les conditions (3) expriment donc que les trois points d'inflexion de la courbe sont à l'infini. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe unicursale du troisième ordre située dans un plan puisse être considérée comme la projection sur ce plan d'une cubique ayant son axe perpendiculaire au plan est que la courbe ait ses trois points d'inflexion à l'infini.

18. Maintenant, étant donnée une cubique définie par des équations de la forme

$$x = x_0 + \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$

$$y = y_0 + \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c},$$

$$z = z_0 + \frac{A''}{\lambda - a} + \frac{B''}{\lambda - b} + \frac{C''}{\lambda - c},$$

déterminons le mouvement hélicoïdal correspondant. Pour cela, simplifions les équations de la cubique en transportant l'origine des coordonnées au point $(x_0, y_0, z_0)$. Les équations de la cubique deviennent alors

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{A}{\lambda - a} + \dfrac{B}{\lambda - b} + \dfrac{C}{\lambda - c}, \\ y = \dfrac{A'}{\lambda - a} + \dfrac{B'}{\lambda - b} + \dfrac{C'}{\lambda - c}, \\ z = \dfrac{A''}{\lambda - a} + \dfrac{B''}{\lambda - b} + \dfrac{C''}{\lambda - c}. \end{cases}$$

Soient, dans le mouvement hélicoïdal correspondant à la cubique, $p$, $q$, $r$ les trois composantes de la rotation suivant les trois axes; $\nu_x$, $\nu_y$, $\nu_z$ les trois composantes de la translation suivant ces mêmes axes. L'équation du plan mené par le point $(x, y, z)$, perpendiculairement à la vitesse de ce point, est

$$(6) \quad (qz - ry + \nu_x)(X - x) + (rx - pz + \nu_y)(Y - y) + (py - qx + \nu_z)(Z - z) = 0.$$

Si le point $(x, y, z)$ est un point de la cubique, le plan déterminé par l'équation (6) doit coïncider avec le plan osculateur à la cubique en ce point. L'équation du plan osculateur à la cubique au point $(x, y, z)$ est

$$(7) \qquad \left(\frac{dy}{d\lambda}\frac{d^2z}{d\lambda^2} - \frac{dz}{d\lambda}\frac{d^2y}{d\lambda^2}\right)(X - x) + \ldots = 0.$$

On a

$$\frac{dy}{d\lambda} = -\left[\frac{A'}{(\lambda - a)^2} + \frac{B'}{(\lambda - b)^2} + \frac{C'}{(\lambda - c)^2}\right],$$

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} = 2\left[\frac{A'}{(\lambda - a)^3} + \frac{B'}{(\lambda - b)^3} + \frac{C'}{(\lambda - c)^3}\right];$$

de même

$$\frac{dz}{d\lambda} = -\left[\frac{A''}{(\lambda-a)^2} + \frac{B''}{(\lambda-b)^2} + \frac{C''}{(\lambda-c)^2}\right],$$

$$\frac{d^2z}{d\lambda^2} = 2\left[\frac{A''}{(\lambda-a)^3} + \frac{B''}{(\lambda-b)^3} + \frac{C''}{(\lambda-c)^3}\right].$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= B'C'' - C'B'', & \mathcal{B} &= C'A'' - A'C'', & \mathcal{C} &= A'B'' - B'A'', \\ \mathcal{A}' &= B''C - C''B, & \mathcal{B}' &= C''A - A''C, & \mathcal{C}' &= A''B - B''A, \\ \mathcal{A}'' &= BC' - C'B, & \mathcal{B}'' &= CA' - AC', & \mathcal{C}'' &= AB' - BA'. \end{aligned}$$

L'équation du plan osculateur au point $(x, y, z)$ est alors

$$(8)\quad [\mathcal{A}(b-c)(\lambda-a)^3 + \mathcal{B}(c-a)(\lambda-b)^3 + \mathcal{C}(a-b)(\lambda-c)^3](X-x) + \ldots = 0.$$

Ce plan osculateur (8) devant coïncider avec le plan (6), il faut que, en remplaçant dans les coefficients de l'équation (6) $x, y, z$ par leurs valeurs (5), ces coefficients, après qu'on aura chassé les dénominateurs, soient proportionnels aux coefficients de l'équation (8). Cette identification donne pour $p, q, r, \nu_x, \nu_y, \nu_z$ les valeurs suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} p &= A(b-c)^2 + B(c-a)^2 + C(a-b)^2, \\ q &= A'(b-c)^2 + B'(c-a)^2 + C'(a-b)^2, \\ r &= A''(b-c)^2 + B''(c-a)^2 + C''(a-b)^2, \\ \nu_x &= \mathcal{A}(c-b) + \mathcal{B}(a-c) + \mathcal{C}(b-a), \\ \nu_y &= \mathcal{A}'(c-b) + \mathcal{B}'(a-c) + \mathcal{C}'(b-a), \\ \nu_z &= \mathcal{A}''(c-b) + \mathcal{B}''(a-c) + \mathcal{C}''(b-a). \end{aligned}\right.$$

Le mouvement hélicoïdal correspondant à la cubique est ainsi entièrement défini. Les équations de l'axe du mouvement hélicoïdal ou de l'axe de la cubique sont

$$\frac{qz - ry + \nu_x}{p} = \frac{rx - pz + \nu_y}{q} = \frac{py - qx + \nu_z}{r}.$$

Comme exemple, considérons la cubique intersection des deux surfaces du deuxième ordre

$$y^2 - xz = 0, \quad yz - x^2 - x = 0.$$

En posant

$$y = \lambda x,$$

on a

$$x = \frac{1}{\lambda^3 - 1}, \quad y = \frac{\lambda}{\lambda^3 - 1}, \quad z = \frac{\lambda^2}{\lambda^3 - 1}.$$

Soient $\alpha$, $\alpha^2$ les racines cubiques imaginaires de l'unité; on voit, en décomposant les fractions rationnelles en fractions simples, que l'on a dans le cas actuel

$$A = A' = A'' = B'' = C'' = \tfrac{1}{3},$$

$$B = C' = \frac{\alpha}{3}, \quad B' = C = \frac{\alpha^2}{3},$$

$$a = 1, \quad b = \alpha, \quad c = \alpha^2;$$

par conséquent, en appliquant les formules (9),

$$p = -3, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

$$\nu_x = -1, \quad \nu_y = 0, \quad \nu_z = 0;$$

L'équation du plan polaire du point $(x, y, z)$ par rapport à la cubique est donc

$$Yz - Zy - \tfrac{1}{3}(X - x) = 0.$$

L'axe des $x$ est l'axe de la cubique.

19. Terminons ce travail en démontrant une propriété que l'on pourrait appeler une propriété cinématique de la cubique gauche, parce qu'elle se rattache directement au mouvement hélicoïdal correspondant à cette cubique. Cette propriété consiste en ce que, si l'on suppose une cubique gauche amenée du mouvement hélicoïdal correspondant, le rayon de torsion de la cubique en un point est proportionnel au carré de la vitesse de ce point. Supposons que l'axe $Oz$ soit l'axe de la cubique. Les composantes de la vitesse d'un point $M(x, y, z)$ de la cubique sont

$$-\omega y, \quad \omega x, \quad V.$$

Ces composantes sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait la normale au plan osculateur en M avec les axes : on sait, en effet, que la vitesse d'un point est normale au plan osculateur en ce point. La normale au plan osculateur infiniment voisin fait de même avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$-\omega(y + dy), \quad \omega(x + dx), \quad V.$$

Soit $d\tau$ l'angle de ces deux droites, on a

$$d\tau^2 = \frac{\omega^4 (x\,dy - y\,dx)^2 + V^2\omega^2 (dx^2 + dy^2)}{[(x^2 + y^2)\omega^2 + V^2]^2}.$$

Mais l'équation différentielle à laquelle satisfait la cubique donne

$$x\,dy - y\,dx = -\frac{V}{\omega}\,dz;$$

donc

$$d\tau^2 = \frac{V^2\omega^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)}{[(x^2 + y^2)\omega^2 + V^2]^2}.$$

Soit T le rayon de torsion

$$T = \frac{ds}{d\tau},$$

et $v$ la vitesse du point M $(x, y, z)$,

$$v^2 = (x^2 + y^2)\omega^2 + V^2,$$

la formule précédente donne

$$T = \frac{v^2}{V\omega}. \tag{10}$$

Ainsi le rayon de torsion en un point de la cubique est proportionnel au carré de la vitesse de ce point.

La formule précédente qui donne T peut encore se mettre sous la forme suivante, en appelant $r$ la distance du point M à l'axe et $k$ le rapport $\frac{V}{\omega}$,

$$T = \frac{r^2}{k} + k.$$

Soit une autre cubique, $k_1$ le rapport de la vitesse de translation à la vitesse de rotation, $r_1$ la distance du point $M_1$ $(x_1, y_1, z_1)$ à l'axe, $T_1$ le rayon de torsion en ce point, on a

$$T_1 = \frac{r_1^2}{k_1} + k_1.$$

Si l'on choisit les deux points M et $M_1$, de telle façon qu'on ait

$$\frac{r}{r_1} = \sqrt{\frac{k}{k_1}},$$

on a

$$T - T_1 = k - k_1.$$

Donc étant données deux cubiques, si à un point M de l'une on fait correspondre un point $M_1$ de l'autre, de telle façon que le rapport $\frac{r}{r_1} = \sqrt{\frac{k}{k_1}}$, la différence des rayons de torsion en ces deux points est constante et égale à $k - k_1$.

20. De la formule (10), qui donne le rayon de torsion, on peut encore déduire la propriété suivante : si sur l'axe du plan osculateur, en chaque point M $(x, y, z)$ d'une cubique, on porte une longueur MM′ proportionnelle à la vitesse de ce point ou bien à la racine carrée du rayon de torsion (ce qui est la même chose); le lieu des points M′ est une nouvelle cubique de même axe que la première. Soient $x', y', z'$ les coordonnées du point M′, on a

$$\frac{x' - x}{-\omega y} = \frac{y' - y}{\omega x} = \frac{z' - z}{V} = l.$$

Le paramètre $l$ est égal à

$$\frac{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}{\sqrt{\omega^2 (x^2 + y^2) + V^2}} = \frac{MM'}{v}.$$

Comme MM′ est proportionnel à $v$, $l$ est constant. Les coordonnées du point M′ sont donc données par les équations suivantes, où $l$ est constant :

$$x' = x - l\omega y, \quad y' = y + l\omega x, \quad z' = z + lV.$$

On voit que le lieu est une nouvelle cubique, car, si $x, y, z$ sont des fonctions rationnelles du troisième degré d'un paramètre variable, il en sera de même de $x', y', z'$. De plus, cette cubique a même axe que la proposée. On a, en effet,

$$(x'\,dy' - y'\,dx') = (x - l\omega y)(dy + l\omega\,dx) - (y + l\omega x)(dx - l\omega\,dy)$$

ou

$$(x'dy' - y'dx') = (xdy - ydx)(1 + l^2\omega^2).$$

Comme on a

$$xdy - ydx + \frac{V}{\omega}dz = 0,$$

et comme

$$dz = dz',$$

on a

$$x'dy' - y'dx' + \frac{V}{\omega}(1 + l^2\omega^2)dz' = 0.$$

Ce qui montre que la nouvelle cubique a même axe que la proposée, et que le rapport $\frac{V'}{\omega'}$ pour cette cubique est égal à

$$\frac{V}{\omega}(1 + l^2\omega^2).$$

# ÉTUDE

DE LA

# DIFFRACTION DANS LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE;

## SON INFLUENCE SUR LES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES,

PAR M. CH. ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
ASTRONOME-ADJOINT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

## INTRODUCTION.

Après l'observation du passage de Mercure du 4 novembre 1868, M. Wolf institua une série d'expériences auxquelles il voulut bien m'associer, et qui avaient pour but de rechercher les conditions auxquelles on devait satisfaire pour obtenir une bonne observation de ce curieux et intéressant phénomène. Le problème était alors difficile; on tentait, pour la première fois, d'étudier, au moyen de procédés purement physiques et pour ainsi dire d'expériences de cabinet, l'une des observations de l'Astronomie en apparence la plus inaccessible à de semblables moyens d'investigation. Nous démontrâmes [1] que les apparences singulières, qui avaient si souvent gêné les observateurs et rendu discordants les résultats des différentes observations, ne tenaient ni à la nature de notre œil ni à la nature du phénomène, et qu'elles pouvaient être évitées et le seraient certainement si l'on n'em-

[1] *Recherches sur les apparences singulières qui ont souvent accompagné l'observation des contacts de Mercure et de Vénus avec le bord du Soleil.* (*Recueil des Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil,* deuxième Partie, p. 115 et suiv.).

ployait pour l'observation que de bons objectifs, et que la mise au point de la lunette fût toujours correcte.

Plus tard, lors du passage de Vénus, que l'Académie des Sciences m'avait chargé d'observer à Nouméa, je fus très-frappé de ce fait que, tandis que trois de mes collaborateurs se servant de lunettes identiques avaient noté le contact presqu'en même temps, mon observation faite à une lunette plus grande donnait une heure très-différente.

Dans ce phénomène si compliqué, tout était-il donc dû d'une part aux défauts de l'instrument, d'autre part à la différence des observateurs, et l'instrument lui-même, supposé parfait, n'intervenait-il point ?

Or, si les résultats des observations faites en 1761, 1769 et 1868 ne paraissent mettre en évidence aucune loi, il n'en est pas de même des observations des stations françaises lors du dernier passage de Vénus, observations faites avec des instruments à peu près identiques entre eux, quant au travail des objectifs; celles-ci semblent, au contraire, indiquer nettement que, pour l'entrée, le contact interne est observé plus tôt, en un même lieu, avec une lunette de moindre ouverture, tandis que, pour la sortie, il est observé plus tard.

Qu'au lieu des heures des contacts on considère les diamètres obtenus pendant le passage, on verra que les diamètres de Vénus mesurés micrométriquement en 1761 et 1769 sont, en moyenne, moindres de 2 secondes environ que celui que donnaient alors les Tables; et que, de même, les diamètres de Mercure et de Vénus, obtenus en 1868 et en 1874, sont plus petits que ceux obtenus antérieurement dans les conditions ordinaires d'observation avec des instruments analogues.

Ces deux faits, en apparence distincts, m'ont paru tenir à la même cause, et pouvoir s'expliquer, tout au moins en partie, en tenant compte des modifications qu'apportent aux images des astres les phénomènes de diffraction dus à la lunette ou au télescope qui sert aux observations. M. Dumas, Président de la Commission du passage de Vénus, voulut bien m'engager à poursuivre cette voie et demander à la Commission les instruments nécessaires aux recherches que je projetais.

Telle est l'origine de ce travail qui, commencé au laboratoire de Physique du Collége de France, a été terminé dans les caves de l'École Normale, dont les longs couloirs forment une vaste chambre noire de près de 100 mètres de long, travail qui m'a d'ailleurs conduit à exa-

miner beaucoup d'autres phénomènes astronomiques que celui que j'avais d'abord en vue.

Mais, avant d'aborder la partie expérimentale de cette étude, il convient de rappeler la théorie des phénomènes de diffraction dont nous venons de parler : nous supposerons d'abord que la source lumineuse est réduite à un point, ou plutôt que son diamètre apparent est insensible.

## CHAPITRE PREMIER.

### SOURCE LUMINEUSE DONT LE DIAMÈTRE APPARENT EST INSENSIBLE.

L'effet immédiat d'un objectif ou d'un miroir aplanétique est de transformer une onde lumineuse incidente émanée d'un point très-éloigné en une onde sphérique, dont le centre est au foyer de la lentille ou du miroir. D'un autre côté, chaque petite portion de cette onde sphérique, limitée par l'ouverture de l'objectif, peut être considérée comme l'origine d'une onde élémentaire dont l'intensité est proportionnelle à sa surface, et les phases de toutes ces ondes élémentaires sont les mêmes au moment où elles quittent la surface sphérique.

Soient donc deux axes rectangulaires $ox$, $oy$, pris dans le plan focal de la lunette, $dx\,dy$ l'aire d'une petite portion rectangulaire A de l'objectif, $q$ sa distance à un point M du plan focal pris sur l'axe des $x$ à une distance $d$ du foyer, la projection sur un axe quelconque de la vitesse du mouvement vibratoire envoyée par A en M peut être représentée par

$$dx\,dy \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - q - \alpha),$$

$v$ étant la vitesse de la lumière, $\lambda$ la longueur d'ondulation considérée et $\alpha$ une constante. La projection de la vitesse du mouvement vibratoire envoyé en M par la surface tout entière de l'objectif sera donc représentée par l'intégrale

$$\int\int \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - q - \alpha)\,dx\,dy$$

étendue à toute la surface de l'objectif.

Or, si l'on prend l'axe de la lunette pour axe des $z$, on a

$$q = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2};$$

en se bornant aux termes du premier degré en $d$, et remarquant que

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2,$$

$f$ étant la distance focale de la lunette; il vient

$$q = \sqrt{f^2 - 2dx}.$$

L'intégrale est donc

$$\iint \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(vt - f - \alpha + \frac{d}{f}x\right) dx\, dy.$$

Soient $y_0$ et $y_1$ la plus petite et la plus grande des valeurs de $y$ qui correspondent à une même valeur de $x$. Cette intégrale se réduit à l'expression

$$\int (y_1 - y_0) \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(vt - f - \alpha + \frac{d}{f}x\right) dx,$$

qui s'applique à tout objectif aplanétique, quelle que soit la forme de l'écran par lequel on a limité son ouverture.

## I. — LUNETTES ET TÉLESCOPES.

### *Étude théorique.*

Examinons d'abord le cas d'une ouverture circulaire, et soit $r$ le rayon de cette ouverture : alors

$$y_1 - y_0 = 2\sqrt{r^2 - x^2},$$

où le signe du radical est essentiellement positif; la vitesse du mouvement vibratoire en M est donc représentée par

$$\begin{aligned} &2\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(vt - f - \alpha + \frac{d}{f}x\right) dx \\ &= 2 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - f - \alpha) \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{f} x\, dx, \end{aligned}$$

car l'intégrale $\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{f} x\, dx$ est évidemment nulle.

Posons

$$(a) \qquad \frac{x}{r} = w, \quad \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{f}r = n,$$

l'expression précédente deviendra

$$N = 4r^2 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - f - \alpha)\int_0^1 \sqrt{(1-w^2)}\cos nw\,dw.$$

Or on voit aisément que la fonction

$$\varphi(n) = \int_0^1 \sqrt{1-w^2}\cos nw\,dw$$

est paire et satisfait à l'équation différentielle

$$\varphi(n) + \frac{3}{n}\frac{d\varphi(n)}{dn} + \frac{d^2\varphi(n)}{dn^2} = 0.$$

Soit donc

$$\varphi(n) = A_0 + A_1 n^2 + A_2 n^4 + \ldots + A_{i-1} n^{2i-2} + A_i n^{2i} + \ldots$$

on aura

$$\frac{3}{n}\frac{d\varphi(n)}{dn} = 3.2A_1 + \ldots + 3.2i\,A_i n^{2i-2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2\varphi(n)}{dn^2} = 2A_1 + 3.4A_2 n^3 + \ldots + 2i(2i-1)A_i n^{2i-2} + \ldots;$$

d'où

$$2i(2i+2)A_i + A_{i-1} = 0.$$

On en déduit

$$(i+1)(2.4.6\ldots 2i)^2 A_i = (-1)^i A_0;$$

d'ailleurs

$$A_0 = \int_0^1 \sqrt{1-w^2}\,dw;$$

d'où, en intégrant par parties,

$$2A_0 = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad A_0 = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc, pour $\varphi(n)$, l'expression

$$\varphi(n) = \frac{\pi}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{n^2}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{n^4}{(2.4)^2} - \frac{1}{4}\frac{n^6}{(2.4.6)^2} + \ldots\right],$$

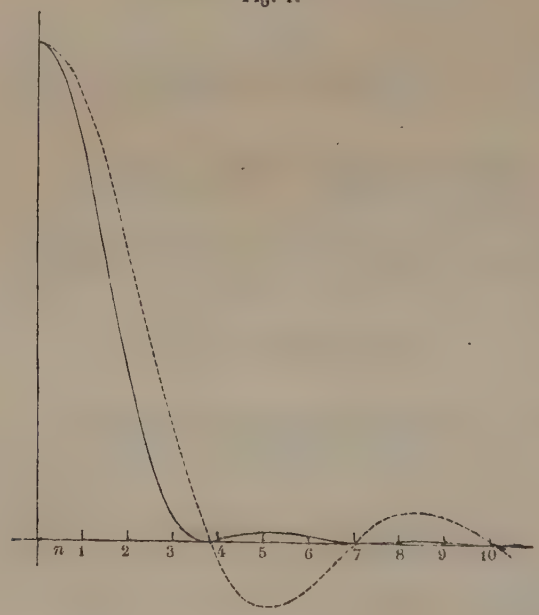
série convergente pour toute valeur de $n$ et qui converge très-rapidement pour les valeurs de $n$ inférieures à l'unité.

Or, d'après la théorie des ondulations, l'intensité I de la lumière au point M du plan focal est proportionnelle au carré du coefficient de $\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - t - \alpha)$ dans l'expression de la vitesse du mouvement vibratoire; on a donc

$$I = A r^4 \varphi^2(n).$$

La Table (A) renferme les valeurs de la vitesse $\varphi(n)$ et de l'intensité $\varphi^2(n)$, pour des valeurs de $n$ croissant de deux dixièmes en deux dixièmes depuis 0 jusqu'à 12; elle a été résumée par la *fig.* 1,

Fig. 1.




dans laquelle les valeurs de $n$ sont portées sur l'axe horizontal, et qui représente les variations de la vitesse et de l'intensité à mesure que

$n$ croît, c'est-à-dire à mesure que, pour un même objectif, on s'éloigne de son foyer dans un plan perpendiculaire à l'axe de la lunette.

TABLE A.

| $n$ | Vitesse. | Intensité. | $n$ | Vitesse. | Intensité. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | +1,0000 | 1,0000 | 6,0 | —0,0922 | 0,0085 |
| 2 | 0,9950 | 0,9900 | 6,2 | 0751 | 0056 |
| 4 | 9801 | 9606 | 4 | 0568 | 0032 |
| 6 | 9557 | 9134 | 6 | 0379 | 0014 |
| 8 | 9221 | 8502 | 8 | 0192 | 0004 |
| 1,0 | 8801 | 7745 | 7,0 | — 0013 | 0000 |
| 2 | 8305 | 6897 | 2 | + 0151 | 0002 |
| 4 | 7742 | 5997 | 4 | 0296 | 0008 |
| 6 | 7124 | 5075 | 6 | 0419 | 0017 |
| 8 | 6461 | 4174 | 8 | 0516 | 0026 |
| 2,0 | 5767 | 3326 | 8,0 | 0587 | 0034 |
| 2 | 5054 | 2554 | 2 | 0629 | 0039 |
| 4 | 4335 | 1879 | 4 | 0645 | 0041 |
| 6 | 3622 | 1312 | 6 | 0634 | 0040 |
| 8 | 2927 | 0857 | 8 | 0600 | 0036 |
| 3,0 | 2261 | 0516 | 9,0 | 0545 | 0029 |
| 2 | 1633 | 0265 | 2 | 0473 | 0022 |
| 4 | 1054 | 0111 | 4 | 0387 | 0015 |
| 6 | 0530 | 0028 | 6 | 0291 | 0008 |
| 8 | + 0067 | 0000 | 8 | 0190 | 0003 |
| 4,0 | — 0330 | 0011 | 10,0 | + 0087 | 0000 |
| 2 | — 0660 | 0044 | 2 | — 0013 | 0000 |
| 4 | 0922 | 0085 | 4 | 0107 | 0001 |
| 6 | 1116 | 0124 | 6 | 0191 | 0004 |
| 8 | 1244 | 0155 | 8 | 0263 | 0007 |
| 5,0 | 1310 | 0172 | 11,0 | 0321 | 0010 |
| 2 | 1320 | 0174 | 2 | 0364 | 0013 |
| 4 | 1279 | 0164 | 4 | 0390 | 0015 |
| 6 | 1194 | 0142 | 6 | 0400 | 0016 |
| 8 | 1073 | 0115 | 8 | 0394 | 0015 |
| 6,0 | —0,0922 | 0,0085 | 12,0 | — 0372 | 0,0014 |

L'inspection de cette courbe montre que, dans une lunette, l'image d'une étoile n'est pas un point, mais un disque lumineux d'un diamètre apparent sensible entouré d'anneaux alternativement obscurs et brillants qui se succèdent très-régulièrement autour du disque central et à intervalles sensiblement égaux.

De plus, les intensités lumineuses des anneaux brillants successifs

vont rapidement en décroissant à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'image; de sorte que le nombre des anneaux visibles autour de l'image d'une étoile diminue lui-même fort rapidement à mesure que l'on observe un astre de moins en moins brillant.

Ces conclusions sont résumées dans le tableau suivant, qui renferme les valeurs de $n$, correspondantes aux minima et maxima successifs, ainsi que l'intensité de la lumière en chacun de ces points par rapport à celle du centre de l'image que nous prenons pour unité.

| | $n$ | Intensité. |
|---|---|---|
| Centre de l'image | 0 | 1 |
| Premier minimum | 3,85 | 0 |
| Premier maximum | 5,23 | $\frac{1}{59}$ |
| Deuxième minimum | 7,14 | 0 |
| Deuxième maximum | 8,43 | $\frac{1}{240}$ |
| Troisième minimum | 10,17 | 0 |
| Troisième maximum | 11,63 | $\frac{1}{820}$ |

### *Historique et vérification expérimentale.*

Telles sont, en effet, les apparences remarquées pour la première fois par Sir William Herschel dans les images des étoiles que donne une bonne lunette :

« Quand on observe une étoile brillante avec une lunette excellente, mais d'un grossissement assez faible, elle a toujours l'apparence d'une masse de lumière dont il est impossible de distinguer la forme, à cause de son éclat, et dont les bords sont rarement exempts de dentelures, quelle que soit la bonté de la lunette. Mais, si le pouvoir amplifiant s'élève jusqu'à 300 ou 400, et qu'on se trouve dans des circonstances favorables, telles qu'une atmosphère tranquille, une température uniforme, l'étoile paraît parfaitement ronde, bien terminée et entourée de plusieurs anneaux alternativement obscurs et lucides, dont les bords semblent légèrement colorés quand on les examine avec attention. Ces anneaux se suivent à très-peu près à des intervalles égaux autour du disque, et sont ordinairement plus faciles à observer et plus réguliers dans les lunettes que dans les télescopes [1]. »

[1] *Traité de la lumière*, par J.-F.-W. Herschel, traduction de Verhulst et Quetelet, p. 501.

Plus loin [1], J. Herschel ajoute :

« Lorsque l'ouverture de la lunette est limitée par un diaphragme circulaire qui touche l'objectif, ou qui s'en trouve plus ou moins éloigné, le disque et les anneaux s'élargissent en raison inverse du diamètre de l'ouverture; lorsque celle-ci est fort réduite (à 1 pouce par exemple, pour une lunette de 7 pieds de longueur focale), le faux disque devient très-grand et a l'air d'une planète; son contour est bien tranché et entouré d'un seul anneau qui est assez brillant pour être aisément remarqué et dont les couleurs se trouvent disposées comme il suit, à compter du centre du disque : 1° du blanc; 2° du rouge très-pâle; 3° du noir; 4° du bleu très-pâle; 5° du blanc; 6° du rouge très-pâle; 7° du noir. Si l'ouverture se rétrécit beaucoup plus (si elle se réduit à $\frac{1}{2}$ pouce par exemple), les anneaux pâlissent tellement qu'ils échappent à la vue, et le disque devient encore plus large : on voit alors la lumière s'affaiblir du centre à la circonférence; ce qui donne au disque une apparence nébuleuse comme celle d'une comète [2]. »

Cet agrandissement du disque central, à mesure que l'ouverture diminue, est une conséquence directe de la théorie. En effet, nous avons posé

$$n = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{f}r;$$

or, si $\delta$ est la valeur en secondes du diamètre du cercle sur lequel se trouve le point M, O l'ouverture $2r$ de la lunette et A la quantité $\frac{2}{\pi}\frac{\lambda}{\sin 1''}$, on a

$$\delta = n\,\mathrm{A}\,\frac{1}{\mathrm{O}};$$

---

[1] *Loco citato*, p. 504.

[2] On peut citer, en outre, les expériences suivantes de W. Herschel, faites à Slough avec des étoiles artificielles et un miroir de $8^{p},8$ (anglais) d'ouverture; les diamètres des disques sont exprimés en centièmes de pouce.

| Ouverture. | Diamètre. |
|---|---|
| $8^{p},8$ | 31 |
| 6,3 | 38 |
| 5,0 | 40 |
| 4,0 | 42 |
| 3,0 | 46 |

(*Philosophical Transactions* pour 1805, p. 52.

de telle sorte que *le diamètre du disque central*, ou celui d'un anneau quelconque, *est inversement proportionnel à l'ouverture de l'objectif.*

La valeur du diamètre de ce *disque central* est, pour chaque objectif, une constante caractéristique qui joue un grand rôle dans les observations qu'on peut faire avec lui.

Si l'on suppose l'objectif *parfait*, son ouverture égale à 10 centimètres, et si l'on prend pour $\lambda$ la valeur qui correspond au jaune, partie la plus intense du spectre, d'où

$$A = 0,727,$$

on a, comme *valeur maximum* de ce disque central,

$$2'',80.$$

On comprend, en effet, et nous le démontrerons plus loin, que ce disque lumineux nous apparaît plus ou moins grand suivant l'intensité de la source observée, ou bien le plus ou moins d'éclat du fond sur lequel on le mesure. C'est ce que Herschel a encore remarqué dans les belles études physiques auxquelles il a fait servir ses excellents télescopes.

« L'une des circonstances les plus remarquables de ce phénomène est, dit-il, le changement de grandeur de la fausse image, selon l'étoile que l'on considère, le disque paraissant, en général, d'autant plus large que l'étoile est plus brillante. Ce ne peut être une illusion d'optique; car, lorsque l'on voit ensemble deux étoiles d'un éclat différent (comme dans le cas d'une étoile double), et qu'on les compare directement, la différence de leurs diamètres est très-sensible [1]. »

En 1823, dix ans avant que la théorie de ces phénomènes ait été faite, Fraunhofer, l'un des fondateurs de l'Institut optique de Munich, avait trouvé que, « si l'on observe avec une lunette la lumière diffractée par des ouvertures rondes de différents diamètres, les diamètres des anneaux colorés sont en raison inverse des diamètres des ouvertures [2] ». Les résultats de ses expériences sont d'ailleurs les suivants :

---

[1] *Traité de la Lumière*, p. 502.

[2] *Nouvelle modification de la lumière par l'influence réciproque des rayons lumineux avec l'examen des lois de cette modification.* (*Astronomische Abhandlungen*, 1823.) Dans ce Mémoire, Fraunhofer a démontré aussi que la même loi s'applique aux rayons diffractés en passant par une fente étroite.

*Ouverture circulaire.*

| Largeur de l'ouverture en pouces de Paris. | Déviation du 1er anneau rouge. | Produit de l'ouverture par la déviation. | Comparaison de l'observation au calcul. Obs.-calcul. |
|---|---|---|---|
| p | ° ′ ″ | | |
| 0,10426 | 0.0.53,8 | 0,0000272 | + 3″ |
| 06713 | 1.22,3 | 268 | + 3 |
| 5001 | 1.48,8 | 264 | + 3 |
| 3997 | 2.12,7 | 257 | + 0 |
| 3791 | 2.15,7 | 249 | — 4 |
| 3318 | 2.41,7 | 260 | + 2 |
| 2682 | 3.13,1 | 251 | — 5 |
| 2318 | 3.49,4 | 258 | — 0 |
| 2237 | 3.54,7 | 255 | — 2 |
| 2134 | 4. 3,6 | 252 | — 5 |
| 1824 | 4.45,5 | 252 | — 5 |
| 1746 | 5. 3,0 | 257 | — 1 |
| 1238 | 6.55,5 | 249 | — 13 |
| 922 | 9.27,3 | 254 | — 9 |

M. George-Biddell Airy est le premier qui donna l'explication théorique des apparences observées par W. Herschel, et montra la relation intime qu'elles ont avec les résultats des expériences de Fraunhofer; son Mémoire est daté de 1834 (1). En 1835, F.-M. Schwerd résolut le même problème (2), sans avoir d'ailleurs connaissance des travaux de M. Airy. Enfin, Knochenhauer en donna, en 1839, une nouvelle solution (3), plus simple et plus élégante que celle de Schwerd; mais sa méthode ne diffère pas sensiblement de celle qu'avait donnée M. Airy, et que j'ai moi-même suivie.

Non content de cette solution théorique, Schwerd vérifia de deux manières les nombres qu'il avait obtenus :

1° Il a mesuré les anneaux produits dans la lunette d'un théodolite, dont l'objectif était diaphragmé à $10^{mm},2$, par l'image du Soleil réflé-

(1) *On the diffraction of an object glass with circular aperture,* par George-Biddell Airy. (*Transactions of the Cambridge philosophical Society,* vol. V, part. I, p. 283 et suiv.)

(2) *Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestelt,* p. 67 et suiv.

(3) *Die Ondulations-Theorie des Lichtes,* p. 36 et suiv.

chie sur un verre de montre; la lumière était d'ailleurs rendue sensiblement homogène par l'interposition d'un verre rouge. Schwerd obtint ainsi 35″,0 pour le rayon du deuxième anneau brillant; la théorie donne le même nombre 35″,0. Avec la boule d'un thermomètre (13 millimètres de diamètre) placée à 15 mètres de l'objectif, le même procédé lui a donné pour diamètre du disque lumineux central 30″,5, tandis que la Table A conduit à la valeur 27″,6. Enfin le diamètre de ce même disque central était réduit aux trois quarts de sa valeur par l'interposition, entre l'oculaire et l'œil, d'un verre noir analogue à ceux que l'on emploie pour l'observation du Soleil.

2° Pour ne négliger aucun moyen de vérification, Schwerd a observé, avec son cercle méridien de 4 pieds, dont l'objectif avait été diaphragmé de façon à ne plus avoir qu'une ouverture égale à 1 pouce de Paris, et en diminuant autant que possible l'éclairement du champ, les intervalles des passages des deux bords du disque brillant donné par les étoiles $\alpha$ et $\beta$ de l'Aigle. Il trouva ainsi que le diamètre de ce disque, sensiblement égal pour chacune d'elles, était compris entre 10 et 12 secondes : la théorie conduit à la valeur 10″,6.

Mais, tandis que, pour Altaïr, étoile de 1re grandeur, Schwerd vit le disque lumineux central entouré d'un anneau brillant, il ne put en distinguer trace autour de celui de $\beta$ de l'Aigle, étoile de 4e grandeur; le disque lumineux, constituant à lui seul l'image de cette étoile, lui parut cependant presque aussi grand que celui d'Altaïr, mais les bords en étaient peu nets et comme noyés.

Ce petit nombre d'anneaux autour du disque lumineux central, et même leur disparition complète, s'expliquent aisément. En effet, les intensités de la lumière, dans les différents anneaux successifs, varient comme la quatrième puissance de l'ouverture de la lunette, et, pour une ouverture donnée, sont des fractions toujours petites et rapidement décroissantes de l'intensité au centre de l'image. Dès que cette dernière devient elle-même petite (résultat que l'on obtient, même pour une étoile de 1re grandeur, en l'observant avec un objectif d'assez long foyer, mais dont l'ouverture est très-réduite), tous les anneaux autres que le premier sont donc invisibles, et celui-ci disparaît à son tour lorsque l'intensité de la source lumineuse est devenue moindre qu'une certaine limite. Or, d'après les mesures de Ludwig

Seidel [1], la lumière que nous envoie $\beta$ de l'Aigle est environ 25 fois moindre que celle d'Altaïr; l'intensité de son premier anneau est donc 1500 fois moindre que celle du centre de l'image d'Altaïr, et, par conséquent, le premier anneau de $\beta$ de l'Aigle est invisible comme l'était le second des anneaux de l'image théorique d'Altaïr dans le plan focal de la lunette employée par Schwerd.

Mais une objection se présente immédiatement à l'esprit : pourquoi le diamètre du disque central a-t-il paru de grandeur à peu près égale dans les deux étoiles? Cela tient évidemment à l'incertitude du procédé d'observation, qui exigerait, pour être précis à la seconde d'arc, l'appréciation, à moins de $\frac{1}{10}$ de seconde de temps, du passage des bords d'un disque faiblement lumineux derrière les fils à peine visibles (on a diminué autant que possible l'éclairement du champ) du réticule de la lunette.

Les expériences de Schwerd présentent pourtant une lacune : il n'a point vérifié la loi suivant laquelle le diamètre du disque central varie avec l'ouverture. Il se contente de dire qu'à la *simple estime* le disque central et les anneaux lui ont paru avec une ouverture de 3 centimètres, 3 fois plus petits qu'avec l'ouverture primitive de 1 centimètre. J'ai comblé cette lacune de deux manières :

1° En observant le point brillant formé par la réflexion de la lumière d'une lampe Drummond, sur une petite boule de verre de 2 centimètres de diamètre, argentée et polie extérieurement. Le tableau suivant résume les mesures que j'ai faites :

| Ouverture de l'objectif en centimètres. | Diamètre observé du disque central. | Diamètre calculé. |
|---|---|---|
| 6,0 | 5″,97 | 4,69 |
| 3,2 | 9,34 | 8,64 |
| 1,7 | 15,55 | 16,29 |

Je ferai remarquer que les images ondulaient assez fortement.

De plus, je déterminais le diamètre de ce disque lumineux en pointant le fil mobile d'un micromètre successivement sur ses deux bords.

---

*Resultate photometrischer Messungen an zweihundert und acht der vorzüglischsten Fixsterne.* (*Münschen Abhandlungen*, vol. IX, 1863, p. 421 et suiv.)

L'œil n'est alors satisfait d'un pointé que lorsque l'image du disque lui apparaît sensiblement ronde; on est ainsi inévitablement conduit à ne pas mettre le fil tout à fait en contact avec le bord de ce disque. Si le fil du micromètre n'avait point d'épaisseur, il en résulterait donc toujours que le disque mesuré serait plus grand que le disque réel. Mais, en réalité, ce fil a une épaisseur sensible, et qui, par un effet que tout le monde connaît, paraît croître à mesure que l'ouverture diminue; comme on pointe l'un des bords du disque avec l'un des bords du fil et le second bord du disque avec le second bord du fil, il faut retrancher de cet élargissement apparent l'épaisseur même du fil. Le diamètre mesuré, d'abord trop grand, peut donc ainsi devenir trop petit si l'ouverture est suffisamment réduite.

2° J'ai mesuré, avec le grand équatorial de la tour de l'Ouest de l'Observatoire de Paris, le diamètre du disque central de l'étoile Arcturus, l'une des plus belles du ciel; j'ai eu ainsi

| Ouverture de l'objectif en centimètres. | Diamètre observé du disque central | Diamètre calculé théoriquement. | Diamètre calculé en partant du premier et en supposant exacte la loi de l'ouverture. |
|---|---|---|---|
| 6,2 | 3",985 | 4",480 | " » |
| 3,7 | 6,314 | 7,494 | 6,675 |

J'ai dit plus haut que le diamètre 2",80, pour le disque lumineux central correspondant à un objectif de 10 centimètres d'ouverture, était une valeur maximum. En effet, et ce fait était facile à prévoir, ce diamètre diminue à mesure que l'intensité de la source diminue elle-même. Pour m'en assurer, j'ai repris l'observation de l'étoile artificielle précédente, avec une lunette de Rossi que je diaphragmais à 3c,2, et j'ai mesuré le diamètre du disque central : 1° avec l'éclairage tout entier; 2° en réduisant cet éclairage autant que le permettait la nécessité de voir les fils du micromètre.

On a obtenu ainsi les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| Éclairage total | 10",38 |
| Éclairage réduit | 8,79 |
| Différence | 1,59 |

Ainsi, en réduisant la lumière de la source d'ailleurs assez peu

comparativement aux variations d'intensité des étoiles de diverses grandeurs, on a pu diminuer le diamètre du disque central du septième environ de sa valeur primitive. Je ferai remarquer, en outre, que, comme phénomène concomitant à cette diminution du diamètre, le nombre des anneaux visibles était considérablement réduit. Avec l'éclairage tout entier, on pouvait compter au moins six anneaux brillants autour du disque central; dans le second cas, au contraire, on ne voyait plus nettement que le premier, quoique cependant on soupçonnât l'existence du second; enfin, en réduisant encore l'éclat (les mesures devinrent alors impossibles), le diamètre avait encore diminué et toute trace d'anneau avait disparu.

Il n'est d'ailleurs point un astronome qui n'ait eu maintes fois l'occasion de constater un fait analogue; mais, si l'on veut le bien étudier, il convient de réduire beaucoup l'ouverture de la lunette, afin d'exagérer le diamètre du disque central et d'en séparer nettement les anneaux qui l'entourent. En regardant, par un ciel parsemé de nuages, une belle étoile, Arcturus, avec le grand équatorial de la tour de l'Ouest, dont j'avais diaphragmé l'objectif jusqu'à 5 centimètres, j'ai constamment remarqué, lors de l'arrivée d'un nuage, les anneaux extérieurs disparaître d'abord, puis le disque central diminuer un peu de diamètre, bientôt après le premier anneau brillant disparaître à son tour pour ne plus laisser dans le plan focal qu'un disque lumineux de grandeur et d'intensité rapidement décroissantes.

### *Solide de diffraction.*

Tous ces faits peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

Imaginons que nous fassions tourner la courbe des intensités (*fig.* 1) autour de son axe vertical; nous engendrerons un certain solide de révolution qui sera pour nous l'image et comme la représentation immédiate des phénomènes lumineux existants dans le plan focal de la lunette; car, si l'axe de ce solide coïncide avec celui de la lunette, la quantité de lumière répandue sur un élément du plan focal est évidemment proportionnelle à la fraction du volume de ce solide qui a pour base l'aire considérée.

Si l'ouverture de la lunette vient à changer, les dimensions transver-

sales de ce solide changent aussi (nous ne tenons pas compte des variations d'intensité qu'introduit le changement d'ouverture); elles diminuent si le diamètre de l'objectif augmente, croissent dans l'hypothèse inverse. Avec la restriction précédente, les apparences produites par un point lumineux, dans des objetifs de différentes ouvertures, sont donc les mêmes que celles que l'on obtiendrait, d'après les lois de l'Optique géométrique, en observant, avec une même lunette, ce solide placé comme nous l'avons dit plus haut, mais à des distances (suffisamment grandes) proportionnelles aux diamètres des différents objectifs.

Nous donnerons le nom de *solide de diffraction* à ce solide, dont l'emploi nous permettra de résoudre simplement quelques-uns des problèmes que nous aurons à traiter.

### *Pouvoir séparateur. — Pouvoir optique.*

Comme conséquence immédiate de ce qui précède, on peut affirmer qu'un objectif ou un miroir d'ouverture déterminée ne peut séparer entièrement l'un de l'autre deux points lumineux dont la distance angulaire tombe au-dessous d'une certaine limite, le diamètre du disque lumineux central qui correspond à cette ouverture.

Je l'ai démontré au moyen d'un système stellaire double, formé en projetant sur une petite boule argentée la lumière de deux lampes Drummond convenablement placées. Pour une ouverture de $1^c,7$ les deux disques centraux étaient au contact et leur diamètre commun était $15'',55$. Avec une ouverture de $3^c,2$, ces deux disques étaient nettement séparés, et leur diamètre était de $8'',93$. En donnant à l'ouverture un diamètre de 6 centimètres, la distance de leurs bords les plus voisins avait encore notablement augmenté.

Or la théorie de la diffraction nous donne, comme diamètre du disque central,

$$16'',29 \text{ pour } 1^c,7$$
$$8'',62 \quad » \quad 3^c,2$$

nombres sensiblement d'accord avec l'expérience. Mais, tandis que, si l'on mesure le diamètre de ce disque au moyen de pointés faits avec le fil mobile d'un micromètre, on obtient des valeurs généralement

supérieures à celles que donne la théorie, on obtient, au contraire, des valeurs moindres si on les détermine en cherchant à établir le contact entre deux disques voisins. Cette différence s'explique aisément et tient aux deux modes différents de mesure.

Ainsi, pour des points lumineux *suffisamment brillants*, on peut admettre que le *pouvoir séparateur* d'un objectif ou d'un miroir de 10 *centimètres d'ouverture* est de

$$2'',80.$$

Ce nom de *pouvoir séparateur* est dû à l'astronome anglais Dawes, qui, après trente-cinq années de mesures micrométriques de distances d'étoiles doubles avec plusieurs instruments d'ouvertures différentes, a énoncé le premier la loi de la variation de ce pouvoir avec l'ouverture de l'instrument (¹).

Mais le diamètre angulaire du disque central diminuant avec l'éclat du point lumineux, la valeur même de ce pouvoir séparateur pour une ouverture déterminée, ou, comme le dit Dawes, la *constante de séparation* caractéristique de cette ouverture, variera avec l'éclat lui-même. Cette constante sera d'autant moindre, et par suite le *pouvoir séparateur* d'autant plus grand, que les étoiles à l'aide desquelles on l'aura mesurée seront de grandeur moindre.

Et comme, d'un autre côté, ces mesures, pour être quelque peu précises, doivent être faites sur des étoiles d'égale grandeur et par conséquent assez faibles, et qu'en outre elles résultent de la mise en contact de deux disques voisins, nous devons nous attendre à ce que la constante de séparation trouvée par Dawes sera beaucoup plus petite que le maximum théorique que nous avons indiqué. Voici d'ailleurs l'énoncé même de Dawes : « M'étant assuré depuis trente-cinq ans, par la comparaison des images formées par plusieurs lunettes d'ouvertures très-différentes, que les diamètres des disques stellaires variaient en raison inverse du diamètre de l'ouverture, j'examinai avec des ouvertures très-différentes un grand nombre d'étoiles doubles, dont les distances me paraissaient bien déterminées et non sujettes à un changement ra-

(¹) *Catalogue of micrometrical measurements of double stars*, by the Rev. W.-R. Dawes. (*Memoirs of the Royal astronomical Society*, vol. XXXV, p. 158.)

pide, dans le but de déterminer le *pouvoir séparateur* de ces ouvertures. J'ai trouvé ainsi comme un fait constant qu'un pouce d'ouverture sépare juste une étoile double composée de deux étoiles de 6e *grandeur* si la distance des centres est 4″,56, les circonstances atmosphériques étant assez favorables. D'après cela, la *constante de séparation*, pour une ouverture de $a$ pouces (anglais), est exprimée par la fraction

$$\frac{4'',56}{a}\text{»};$$

ce qui équivaut à dire qu'une ouverture de 10 *centimètres* peut séparer deux étoiles de 6e grandeur distantes de

$$1'',16.$$

Nous ajouterons que, d'après les expériences d'Arago (1), l'intensité lumineuse d'une étoile de 6e grandeur est au plus le $\frac{1}{36}$ de celle d'une étoile de 1re grandeur.

Lors de ses belles recherches sur la construction des télescopes, et bien avant la publication du Mémoire de Dawes, Foucault était arrivé à la même loi par un procédé très-différent (2) qui consistait à « diriger un télescope vers une mire lointaine, formée en traçant sur une lame d'ivoire des séries de divisions partagées en groupes successifs où le millimètre est partagé en parties de plus en plus petites. La largeur du trait doit varier d'un groupe à l'autre en proportion telle, que dans chacun d'eux les espaces noircis aient la même étendue que l'intervalle qui les sépare ».

Il avait énoncé la loi précédente en disant « qu'il existe pour chaque ouverture déterminée un *pouvoir optique* maximum qu'on ne peut dépasser, maximum qui varie en raison inverse de cette ouverture et qui, pour une ouverture de 10 *centimètres*, est égal à

$$1'',3\text{ »}.$$

Ce fait, que la constante de séparation de Foucault est supérieure à

---

(1) *Œuvres complètes*, vol. X, p. 266.

(2) *Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté.* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, vol. V, p. 219 et suiv.)

celle de Dawes, tout en n'en différant que fort peu, est à noter. Le procédé qu'il employait aurait dû, en effet, toutes choses égales d'ailleurs, le conduire à un nombre moindre; le premier minimum dans l'image d'une ligne lumineuse étant, comme nous le verrons plus loin, moins éloigné du centre de l'image que dans le cas d'un point. Mais, d'un autre côté, la mire dont il se servait était certainement plus lumineuse qu'une étoile de 6e grandeur; par cette seconde raison, la valeur de la constante de séparation a été au contraire augmentée.

Cet aperçu historique ne serait point complet si nous ne disions que l'influence de l'ouverture sur la distance apparente de deux étoiles voisines avait été reconnue par W. Herschel dès 1782, sans que cependant il l'ait énoncée sous la forme précise que les travaux de Dawes et Foucault lui ont récemment donnée.

« Le 20 août 1782, j'ai observé l'étoile double ε du Bouvier avec un grossissement de 460; les disques de ces deux étoiles étaient inégaux; l'un était 3 fois plus large que l'autre, et leur distance était environ 1 fois $\frac{1}{4}$ le diamètre du plus large. Au moyen d'un cercle de carton, j'ai réduit l'ouverture du télescope à n'avoir plus que $3^p,5$ au lieu de $6^p,3$ : la distance des deux étoiles diminua considérablement, et ne fut plus que la moitié du diamètre de la plus petite.

» De même, le rapport des diamètres des deux étoiles avait aussi beaucoup changé; la plus petite des étoiles était alors au moins les deux tiers, si ce n'est les trois quarts de la grande (1) ».

*Remarque I.* — Dans cette étude des effets d'un objectif ou d'un miroir sur les rayons émanés d'un point lumineux, on a supposé que cet objectif ou ce miroir était *parfait* et complétement négligé les effets des différentes *aberrations* dont il peut être affecté. Nous n'avons pas l'intention de traiter cette question avec détail : nous nous contenterons de faire remarquer que ces imperfections ont toutes pour résultat de changer la forme du *solide de diffraction* théorique, de manière à

---

(1) *Experiments of ascertaining how far telescopes will enable as to determine very small angles, and to distinguish the real from the spurious diameters of celestial and terrestrial objects; with an Application of the result of these experiments to a serie of Observations on the nature and magnitude of M. Harding's lately discovered star.* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year* 1805, part I, p. 31 et suiv.)

augmenter en définitive le diamètre du disque central correspondant à l'image d'un point. Tous les instruments affectés d'aberration ont donc, dans chaque cas, une constante de séparation plus grande que celles que nous venons de donner.

*Remarque II.* — Nous avons également laissé de côté les anneaux qui entourent le disque central.

Quelquefois cependant, ils ont une influence sur l'observation. Ainsi, par exemple, avec un équatorial de 10 centimètres d'ouverture, les deux composantes de $\zeta$ d'Hercule (1″,25 de distance), sont presque au contact, et parfois même le compagnon de l'étoile dominante se montre nettement séparé; avec une lunette de 13 centimètres, au contraire, le premier anneau brillant de l'étoile principale se rapproche et passe sur le compagnon, de telle sorte que celui-ci s'allonge et semble faire partie de l'image de l'étoile principale. Ce fait est assez fréquent dans les systèmes binaires formés par deux étoiles assez voisines et d'inégales grandeurs; et il montre que, dans certains cas, il y a, contrairement à la règle générale, avantage à se servir d'une lunette d'ouverture relativement petite.

## II. — OUVERTURE ANNULAIRE.

### *Cas général.*

Pour obvier à l'inconvénient que nous venons de signaler, Sir John Herschel a souvent recommandé de couvrir le centre de l'objectif ou du miroir de l'instrument employé par un diaphragme circulaire dont le diamètre serait le sixième ou le cinquième de l'objectif. Dawes a appliqué ce procédé dans sa première série de mesures d'étoiles doubles [1]; lors du dernier passage de Mercure, M. Stéphan avait aussi diaphragmé par le centre le miroir de son télescope de $0^m,80$ et en avait réduit l'ouverture à moitié. Il importe donc d'étudier ce système particulier de diaphragmes.

Soit, en général, $(1-p)r$ le rayon du diaphragme central : on voit

---

[1] *Micrometrical measurements and distances of* 121 *double stars taken at Ormskirk during the years* 1830, 1831, 1832 et 1833. (*Memoirs of the Royal astronomical Society*, vol. VIII, p. 63.)

aisément, en employant les mêmes notations que plus haut, que la vitesse du mouvement vibratoire envoyé en un point M, par la surface découverte de l'objectif, est proportionnelle à

$$(a) \qquad \varphi(n) - (1-p)^2 \varphi[n(1-p)],$$

et par suite l'intensité en ce point mesurée par

$$(b) \qquad \{\varphi(n) - (1-p)^2 \varphi[n(1-p)]\}^2.$$

Cette formule montre que, quel que soit $p$, l'intensité lumineuse devient nulle pour une valeur de $n$, moindre que dans le cas où l'ouverture était entière; le diamètre du disque lumineux central a donc diminué, et par suite le pouvoir séparateur de l'instrument a augmenté. Ces faits ont été vérifiés depuis longtemps par W. Herschel dans son observatoire de Slough (1). Observant avec un télescope de $8^p,8$ ($22^c,35$) d'ouverture le point lumineux formé par la réflexion du Soleil sur une petite boule d'argent placée à une grande distance, il a obtenu pour le diamètre du disque central les nombres suivants :

| | | Diamètre. |
|---|---|---|
| Ouverture entière..... | $0^p$ à $8^p,8$ | 31 |
| Ouverture annulaire..... | 6,5 à 8,8 | 17 |
| » ..... | 3 à 8,8 | 18 |
| » ..... | 4 à 6,5 | 22 |
| » ..... | 1,6 à 4,0 | 42 |

Tout récemment enfin, MM. C. Wolf et Ad. Martin ont vérifié, avec une mire analogue à celle de Foucault, que le pouvoir séparateur d'un miroir augmente quand on en couvre le centre (2).

Il faut remarquer cependant que, dans certaines observations d'étoiles doubles, l'existence de cet écran central devient désavantageuse; les deux premiers anneaux brillants sont, en effet, beaucoup plus intenses

---

(1) *Experiments on the Means of ascertaining the magnitude of small celestial Bodies*, by William Herschel (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year* 1805, part I, p. 31 et suiv.)

(2) *Projet d'appareil photographique pour l'observation du passage de Vénus.* (*Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil*, p. 177.)

par rapport au disque central que dans le cas de l'ouverture entière. Il en résulte que ces anneaux cachent souvent les petits compagnons des étoiles les plus brillantes, et, d'un autre côté, que, traversés par eux, les disques centraux de deux étoiles d'intensité à peu près égale et suffisamment voisines, ne paraissent plus circulaires, mais allongées et sensiblement elliptiques.

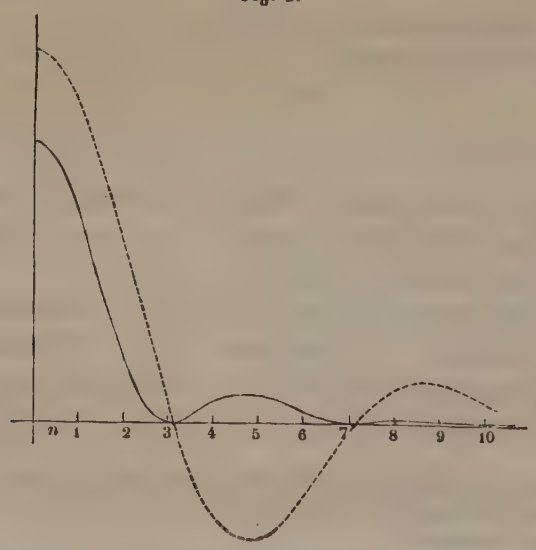
*Cas où* $p = \frac{1}{2}$.

Examinons, en particulier, le cas où le rayon de l'écran central est la moitié de celui de l'objectif ou du miroir employé. La vitesse du mouvement vibratoire au point M est alors proportionnelle à l'expression

$$\varphi(n) - \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{n}{2}\right).$$

La Table B donne les valeurs de la vitesse du mouvement vibratoire et celles de l'intensité pour des valeurs de $n$ croissant de 2 dixièmes en

Fig. 2.




2 dixièmes, depuis $n = 0$ jusqu'à $n = 12$. La *fig.* 2 les représente graphiquement. Toutes deux montrent que l'intensité est nulle pour

les valeurs de $n$ égales à 3,15; 7,18; 10,97, et maximum pour les valeurs 4,9; 8,7 et 11,8.

Dans ces limites, il y a donc le même nombre de maxima et de minima que lorsque l'objectif est complétement libre; d'ailleurs le premier des anneaux brillants ainsi formés est ici plus près du centre de l'image; en d'autres termes, le diamètre du disque central est moindre. La constante de séparation est donc moins considérable; elle a diminué du dixième de sa valeur. A ce point de vue, l'interposition d'un pareil diaphragme équivaut donc sensiblement à augmenter du dixième environ l'ouverture de l'instrument.

Mais c'est là un fait digne de remarque, au lieu d'être réduite aux trois quarts de sa valeur primitive, comme on est porté à l'admettre *a priori*, l'intensité du disque lumineux central a été diminuée de moitié, tandis que celles des deux premiers anneaux brillants ont été quadruplées et doublées (celle du troisième anneau est, au contraire, quatre fois moindre). Il semble donc qu'en s'opposant à l'effet optique des parties centrales de l'objectif on ait pour ainsi dire chassé la lumière du centre de l'image.

D'un autre côté, les intensités des premiers anneaux étant, dans le cas qui nous occupe, des fractions très-notables $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{80}$ environ de celles du disque central, une pareille disposition peut rendre des services dans l'étude de ces anneaux brillants.

TABLE B.

| $n$ | Vitesse. | Intensité. | $n$ | Vitesse. | Intensité. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | +0,7500 | 0,5625 | 2,8 | +0994 | 0,0099 |
| 2 | 7456 | 5561 | 3,0 | + 403 | 16 |
| 4 | 7313 | 5348 | 2 | — 148 | 2 |
| 6 | 7088 | 5024 | 4 | 684 | 47 |
| 8 | 6770 | 4585 | 6 | 1085 | 118 |
| 1,0 | 6381 | 4072 | 8 | 1456 | 212 |
| 2 | 5916 | 3500 | 4,0 | 1772 | 314 |
| 4 | 5395 | 2911 | 2 | 2012 | 405 |
| 6 | 4819 | 2322 | 4 | 2185 | 477 |
| 8 | 4209 | 1772 | 6 | 2290 | 524 |
| 2,0 | 3567 | 1272 | 8 | 2328 | 542 |
| 2 | 2916 | 0850 | 5,0 | 2304 | 531 |
| 4 | 2259 | 510 | 2 | 2225 | 495 |
| 6 | +0,1616 | 0,0261 | 4 | —0,2096 | 0,0440 |

TABLE B (suite).

| *n* | Vitesse. | Intensité. | *n* | Vitesse. | Intensité. |
|---|---|---|---|---|---|
| 5,6 | —0,1926 | 0,0371 | 8,8 | 0,0830 | +0,0069 |
| 8 | 1720 | 296 | 9,0 | 800 | 64 |
| 6,0 | 1487 | 221 | 2 | 752 | 57 |
| 2 | 1238 | 153 | 4 | 682 | 46 |
| 4 | 976 | 95 | 6 | 602 | 36 |
| 6 | 715 | 51 | 8 | 509 | 26 |
| 8 | 456 | 21 | 10,0 | 415 | 17 |
| 7,0 | —0,0211 | 0,0004 | 2 | 316 | 10 |
| 2 | +0,0019 | 0,0000 | 4 | 223 | 5 |
| 4 | 222 | 0,0005 | 6 | 134 | 2 |
| 6 | 402 | 16 | 8 | +0,0057 | 0,0000 |
| 8 | 549 | 30 | 11,0 | —0,0012 | 0,0000 |
| 8,0 | 669 | 45 | 2 | 66 | 0,0000 |
| 2 | 753 | 57 | 4 | 102 | 0,0001 |
| 4 | 810 | 66 | 6 | 132 | 2 |
| 6 | 832 | 69 | 8 | 145 | 2 |
| 8 | +0,0830 | 0,0069 | 12,0 | —0,0141 | 0,0002 |

Ce rapport de dimensions entre l'écran central et l'ouverture avait attiré l'attention de W. Herschel (¹).

A l'aide de son télescope de $0^m,224$ d'ouverture, il mesurait le disque central d'un point lumineux artificiel : 1° avec l'ouverture entière; 2° avec la portion annulaire de $0^m,117$ à $0^m,224$; 3° avec la partie centrale de zéro à $0^m,117$. Voici les nombres qu'il a obtenus, exprimés en centièmes de pouce :

| | | | Diamètre. |
|---|---|---|---|
| | m | m | |
| Ouverture entière ..... | 0,0 | à 0,224 | = 31 |
| » annulaire ..... | 0,117 | à 0,224 | = 22 |
| » centrale ..... | 0,0 | à 0,117 | = 40 |

De même, le disque central de $\alpha$ de la Lyre était le plus petit avec l'ouverture annulaire, plus large avec l'ouverture entière, et plus large encore avec l'ouverture centrale seule. Enfin le système double formé par $\alpha$ des Gémeaux, observé de la même manière, a montré que la distance des deux composantes était plus grande avec l'ouverture annulaire que dans les deux autres cas.

(¹) *Philosophical Transactions for* 1805, p. 54.

J'ai fait aussi des mesures pour ce cas particulier, et j'ai déterminé le diamètre d'une étoile artificielle formée comme je l'ai déjà indiqué plus haut. Voici les résultats que j'ai obtenus en donnant à la lunette une ouverture de $3^c,2$ :

| | |
|---|---|
| Ouverture entière | $10'',54$ |
| Ouverture annulaire | $9'',06$ |

*Cas où p est infiniment petit.*

Quelle que soit la valeur de $p$, le sens du phénomène est le même, comme on le voit en construisant la courbe des vitesses qui correspond à chaque cas. Dès que l'on recouvre le centre d'un objectif ou d'un miroir, la distance au centre du premier anneau noir diminue, et en même temps le rapport entre l'intensité lumineuse dans les premiers anneaux brillants et au centre, où elle diminue progressivement, va en augmentant : cette distance et ce rapport tendent chacun vers une limite déterminée, atteinte lorsque $p$ est infiniment petit, c'est-à-dire lorsque la portion laissée nue de l'objectif est réduite à une bande annulaire infiniment étroite.

Or, si nous reprenons l'expression $(a)$, et si nous y supposons $p$ infiniment petit, elle devient

$$(c) \qquad \frac{p}{n}\frac{d}{dn}[n^2\varphi(n)];$$

de telle sorte que les anneaux obscurs correspondent alors aux maxima et aux minima de $n^2\varphi(n)$.

J'ai calculé, dans la Table (C), les valeurs de l'expression $n^2\varphi(n)$; cette table montre que l'intensité lumineuse est nulle aux points du plan focal caractérisés par les valeurs suivantes de $n$ :

$$2,40, \quad 5,5, \quad 8,76, \quad 11,92, \quad \ldots.$$

Tous les anneaux obscurs, et par conséquent aussi les anneaux brillants, sont donc plus rapprochés les uns des autres et du centre de l'image que lorsque l'ouverture est entière.

TABLE C.

| $n$ | $n^2\varphi(n)$ | $n$ | $n^2\varphi(n)$ |
|---|---|---|---|
| 0,0 | +0,0000 | 6,0 | −3,3192 |
| 2 | 0,0398 | 2 | 2,8838 |
| 4 | 0,1568 | 4 | 2,3288 |
| 6 | 0,3442 | 6 | 1,6524 |
| 8 | 0,5901 | 8 | 0,8870 |
| 1,0 | +0,8801 | 7,0 | −0,0637 |
| 2 | 1,1966 | 2 | +0,2827 |
| 4 | 1,5170 | 4 | 1,6221 |
| 6 | 1,8227 | 6 | 2,4218 |
| 8 | 2,0930 | 8 | 3,1373 |
| 2,0 | 2,3080 | 8,0 | 3,7568 |
| 2 | 2,4442 | 2 | 4,2269 |
| 4 | 2,5000 | 4 | 4,5537 |
| 6 | 2,4471 | 6 | 4,6916 |
| 8 | 2,2971 | 8 | 4,6440 |
| 3,0 | 2,0340 | 9,0 | 4,4145 |
| 2 | 1,6740 | 2 | 4,0016 |
| 4 | 1,2180 | 4 | 3,4211 |
| 6 | 0,6890 | 6 | 2,6830 |
| 8 | +0,0965 | 8 | 1,8240 |
| 4,0 | −0,5280 | 10,0 | +0,8700 |
| 2 | 1,1616 | 2 | −0,1352 |
| 4 | 1,7887 | 4 | 1,1556 |
| 6 | 2,3744 | 6 | 2,1392 |
| 8 | 2,8644 | 8 | 3,0771 |
| 5,0 | 3,2750 | 11,0 | 3,8841 |
| 2 | 3,5640 | 2 | 4,5500 |
| 4 | 3,7376 | 4 | 5,0700 |
| 6 | 3,7366 | 6 | 5,4000 |
| 8 | 3,5952 | 8 | 5,4488 |
| 6,0 | −3,3192 | 12,0 | −5,3568 |

D'un autre côté, abstraction faite du facteur $\frac{\pi}{2}p$, l'expression $(c)$ peut être représentée par la série

$$(d) \qquad 1-\frac{n^2}{(2)^2}+\frac{n^4}{(2.4)^2}-\frac{n^6}{(2.4.6)^2}+\frac{n^8}{(2.4.6.8)^2}-\ldots\pm\frac{n^{2q}}{(2.4.6\ldots 2q)^2},$$

série qui est convergente, quel que soit $n$, dès que

$$2q > n.$$

Cette formule permet de calculer l'intensité lumineuse des anneaux brillants successifs : dans les deux premiers, par exemple, elle est sensiblement le *tiers* et le *vingtième* de celle du centre. Avec une semblable ouverture et un point lumineux suffisamment brillant, le disque central doit donc paraître réduit à son minimum, et le nombre des anneaux qui l'entourent avoir considérablement augmenté.

Ainsi se trouvent expliquées les apparences que W. Herschel avait obtenues autrefois (1).

« Quand on emploie des ouvertures annulaires, les phénomènes sont très-beaux et très-réguliers. Si l'anneau devient plus étroit, la grandeur du disque et la largeur des anneaux diminuent aussi; mais, en revanche, ces anneaux deviennent plus nombreux. Avec des ouvertures annulaires dont les diamètres extérieurs sont (en pouces) 5,5, 0,7 et 2,2, et les diamètres intérieurs 5,0, 0,5 et 2,0, la Chèvre offrit les apparences suivantes.... Dans le dernier cas, le disque était réduit à un point presque imperceptible; les anneaux colorés étaient si serrés et en si grand nombre, qu'à peine on pouvait les compter. On les aurait pris, au premier coup d'œil, pour une simple tache ronde et lumineuse. »

Dans la longue série de ses belles observations, Dawes s'est souvent servi, surtout pour les étoiles faibles, du diaphragme suivant (2). En avant de son objectif de 8p, 25 (20 centimètres) d'ouverture, il place une feuille de carton, percée suivant 15 cercles concentriques de 770 trous équidistants et de 4 à 5 millimètres de diamètre, l'un d'eux étant au centre même de l'objectif. « L'effet, dit-il, en est très-agréable. Les disques sont considérablement plus petits qu'avec l'ouverture entière; l'éclat des anneaux est diminué proportionnellement, et ils ne sont guère perceptibles que pour les étoiles très-brillantes. »

Chacun des anneaux concentriques, sur lesquels sont distribuées ces petites ouvertures, fonctionne, à l'intensité près, comme le ferait un anneau excessivement étroit.

L'ensemble fonctionne donc comme le ferait un écran, percé depuis ses bords jusqu'à son centre, d'une série d'anneaux concentriques infi-

---

(1) *Traité de la lumière*, par sir J. Herschel, traduction Quetelet, p. 504.

(2) *Micrometrical Measurements*. (*Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. XXXV, p. 135.

niment minces et infiniment voisins. C'est ce que j'ai vérifié, en me servant :

1° D'un écran formé d'anneaux concentriques de 3 millimètres de large, dont le plus grand avait 10 centimètres de rayon extérieur, et séparés l'un de l'autre par un anneau plein de même largeur;

2° D'un écran de même dimension, analogue à celui de Dawes et dont les trous avaient 3 millimètres de diamètre.

Les phénomènes sont identiques dans les deux cas, sauf une petite différence d'intensité. L'image d'une étoile artificielle se compose d'un disque central extrêmement petit et très-brillant, entouré d'une large zone presque noire, parsemée d'anneaux très-resserrés et fort peu intenses, et, fait très-remarquable, bordée par un large anneau, presque aussi brillant que le disque central et dont la distance au centre a été trouvée de 34″,20 pour une ouverture de 10 centimètres.

Avec une belle étoile les apparences lumineuses sont plus complètes; dans l'image d'Arcturus, donnée par le grand équatorial de la tour de l'ouest de l'Observatoire de Paris ($0^m$,32 d'ouverture), on voit au delà de cette couronne lumineuse, qui est verte à l'intérieur, rouge à l'extérieur, et dont le diamètre a été trouvé de 37″,0, deux anneaux d'intensité décroissante, colorés comme elle, et distants du centre de 53″ et 72″.

Ce beau phénomène est un de ceux qui mettent le mieux en évidence cette espèce de projection de la lumière hors des parties centrales de l'image, que j'ai déjà signalée plus haut (1).

## III. — HÉLIOMÈTRE.

Quoique imaginée par un astronome français, Bouguer (2), cette disposition optique n'a jamais été employée en France d'une manière

(1) Dès que l'on s'éloigne du foyer dans un sens ou dans l'autre, les phénomènes, sans être d'ailleurs symétriques de part et d'autre, changent complétement d'aspect. Les anneaux qui sillonnaient la plage obscure acquièrent presque subitement une grande intensité et cette plage s'éclaire presque brusquement; de sorte qu'il y a là un moyen des plus précis pour s'assurer de la mise au point d'une lunette sur une étoile.

(2) *De la mesure des diamètres des plus grandes planètes; description d'un nouveau micromètre appelé* héliomètre (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1748).

suivie. Arago peut-être a fait quelques essais avec un appareil de ce genre, d'ailleurs assez grossièrement monté. En revanche, depuis que Bessel a montré dans son observatoire de Königsberg tout le parti qu'on en pouvait tirer, l'héliomètre est presque universellement employé en Allemagne; et, lors du dernier passage de Vénus, toutes les stations allemandes en étaient pourvues. Il est donc fort important de l'étudier au point de vue optique. Pour cela, il suffit bien évidemment d'étudier séparément l'effet de l'une quelconque des deux moitiés de lentille dont il est formé.

Examinons d'abord ce qui se passe en un point de l'intersection du plan focal et d'un plan contenant l'axe de la lunette et le diamètre qui limite la demi-lentille.

La différence des deux ordonnées correspondant à une même valeur de $x$ est alors

$$\sqrt{r^2 - x^2},$$

c'est-à-dire moitié moindre que dans le cas de l'objectif entier; et cette modification est la seule qu'il faille apporter aux raisonnements que nous avons faits pour trouver la vitesse du mouvement vibratoire envoyée en ce point par l'ouverture tout entière. Cela revient à dire que les maxima et les minima de lumière y auront lieu aux mêmes points, mais que l'intensité lumineuse en chaque point sera le quart de ce qu'elle était avec l'objectif entier.

Les choses se passent bien différemment pour un point situé sur une ligne perpendiculaire à la précédente. Prenons cette ligne pour axe des $x$, et faisons le même calcul que plus haut, nous trouverons aisément que la vitesse du mouvement vibratoire est

$$2r^2 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - f - \alpha)\int_0^1 \sqrt{1-w^2}\cos nw\,dw$$
$$+ 2r^2 \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - f - \alpha)\int_0^1 \sqrt{1-w^2}\sin nw\,dw,$$

de telle sorte que l'intensité lumineuse en un point de l'axe des $x$ sera donnée par l'expression

$$(d)\quad \mathrm{I} = 4r^4\left[\left(\int_0^1 \sqrt{1-w^2}\cos nw\,dw\right)^2 + \left(\int_0^1 \sqrt{1-w^2}\sin nw\,dw\right)^2\right].$$

A une même distance du centre de l'image, l'intensité ne sera donc pas la même suivant la ligne de section que suivant une perpendiculaire à cette ligne. Dans ce dernier cas, les maxima et les minima s'éloigneront du centre; en d'autres termes, les anneaux brillants et obscurs, ainsi que le disque lumineux central, auront une forme sensiblement elliptique.

C'est ce que j'ai vérifié, soit à l'aide d'étoiles artificielles, soit sur le ciel avec l'équatorial de la tour de l'Ouest : dans le premier cas, je réduisais au moyen de diaphragmes circulaires l'ouverture de la lunette, à $5^c,0$ ou à $3^c,2$, et tantôt lui laissant toute cette ouverture, tantôt en couvrant la moitié au moyen d'une feuille de carton noirci, je mesurais les deux diamètres du disque lumineux central. J'ai obtenu ainsi les nombres suivants :

| | *Ouverture entière.* | | *Demi-objectif horizontal.* | |
|---|---|---|---|---|
| | Diamètre | | Diamètre | |
| Ouverture. | horizontal. | vertical. | horizontal. | vertical. |
| $5^c,0$ | $7'',010$ | $6'',986$ | $7'',083$ | $9'',138$ |
| 3,2 | | | 9,981 | 15,671 |

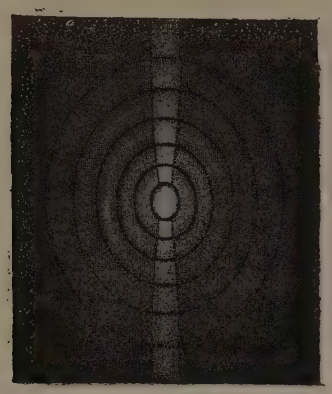
Le diamètre mesuré suivant la ligne de section est le même dans les deux cas, et il est en moyenne de $7'',026$. Le diamètre perpendiculaire est au contraire plus grand lorsqu'on observe avec une moitié de l'objectif, et la différence est d'autant plus grande que l'ouverture est plus petite.

Néanmoins, comme, pour mesurer la distance de deux étoiles avec un héliomètre, on amène toujours la ligne de section de l'objectif à être parallèle à la droite qui joint les deux astres, les mesures ainsi faites sont de tous points comparables à celles que donne un objectif ordinaire; et même, l'intensité lumineuse étant avec un héliomètre le quart de ce qu'elle est avec un objectif de même ouverture, le pouvoir séparateur de l'héliomètre sera un peu plus grand pour les étoiles faibles que celui de l'objectif entier.

L'aspect que présentent les anneaux qui entourent le disque central est d'ailleurs complétement modifié. Ces anneaux sont devenus elliptiques; en outre, on voit perpendiculairement à la ligne de section et de chaque côté du disque central une ligne lumineuse assez intense

qui occupe presque toute la longueur du champ (*fig.* 3), et qui se résout peu à peu, si l'on diminue graduellement l'ouverture, en une série

Fig. 3.



de points lumineux formant comme les renforcements des différents anneaux brillants au sommet situé sur leur grand axe. Avec une ouverture de $3^c,2$, la distance des deux points lumineux correspondants au premier anneau brillant a été trouvée égale à

$$21'',767.$$

La théorie rend compte de ces apparences : si l'on calcule les valeurs de l'intensité, sur une perpendiculaire à la ligne de section, on trouve en effet que le premier minimum a lieu pour une valeur de $n$ très-voisine de $7,0$; suivant la ligne de section, ce premier minimum correspond au contraire à $n = 3,85$. Les anneaux produits autour du disque central et ce disque lui-même doivent donc bien prendre une forme elliptique.

## CHAPITRE II.

### SOURCE LUMINEUSE DONT LE DIAMÈTRE APPARENT EST SENSIBLE.

L'observation a montré que les différents éléments, ou points lumineux, dont se compose une source lumineuse de dimensions finies, sont

à un instant quelconque dans des phases différentes de leur période de vibration; de telle sorte que les mouvements qu'ils envoient en un point quelconque ne peuvent jamais interférer, et que l'intensité lumineuse en ce point est la somme des intensités qu'y produirait chacun des éléments de la source pris isolément.

L'intensité lumineuse sur un élément superficiel du plan focal est donc représentée par la somme des volumes des parallélépipèdes élémentaires qui lui correspondraient successivement dans le *solide de diffraction* caractéristique de l'ouverture employée (¹), si l'on plaçait son axe successivement au centre de chacun des éléments lumineux dont la source est formée : en d'autres termes, quelle que soit la forme donnée à l'ouverture de l'instrument dont on se sert, l'intensité lumineuse en un point quelconque M du plan focal s'obtient comme il suit :

Théorème. — *On place le solide de diffraction, caractéristique de l'ouverture, de façon que son axe, perpendiculaire au plan focal, passe par le point* M; *toute la portion du volume de ce solide comprise dans l'image de la source, telle qu'elle résulte des lois de l'optique géométrique, mesure l'intensité lumineuse au point* M.

Pour bien faire comprendre l'usage de ce théorème, on l'appliquera successivement aux différentes ouvertures déjà étudiées, et aussi à des sources lumineuses de formes diverses.

## I. — LUNETTES ET TÉLESCOPES.

*La source est une fente infiniment petite, une droite lumineuse.*

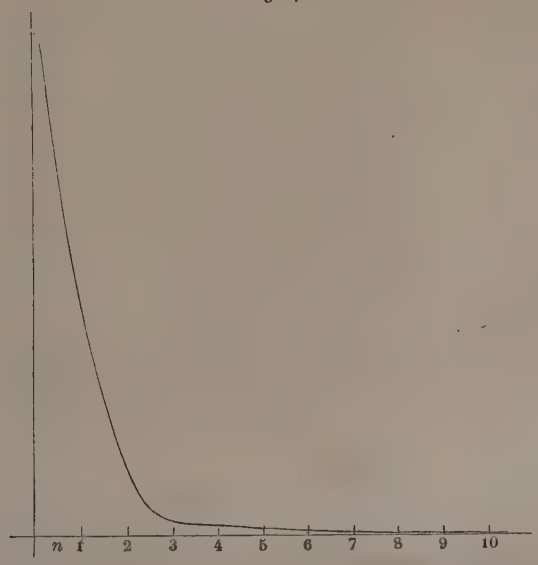
J'étudierai d'abord le cas où une seule des dimensions de l'image géométrique de la source acquiert une valeur finie, que je supposerai d'ailleurs assez grande. Dans le plan focal d'un objectif ou d'un miroir aplanétique, les phénomènes lumineux sont alors tout différents, suivant que le point considéré est sur la direction même de la ligne lumineuse, ou qu'il est, au contraire, d'un côté ou de l'autre de cette ligne.

(¹) En théorie, ce solide de diffraction s'étend indéfiniment dans un sens perpendiculaire à son axe. En pratique, on doit le limiter au minimum à partir duquel l'intensité lumineuse est insensible.

1° *Sur la ligne lumineuse ou son prolongement.* — Au milieu de l'image géométrique de la source, l'intensité est égale à la surface de la section méridienne du solide de diffraction; il en est ainsi jusqu'au point A tellement situé, que le bord de ce solide, placé comme nous l'avons dit, coïncide alors avec celui de la fente. A partir de là, l'intensité lumineuse va en diminuant progressivement, et elle est pour chaque point égale à la surface entière de la section méridienne diminuée de la partie graduellement croissante qui se trouve en dehors de la fente : au bord même de cette fente, l'intensité est la moitié de ce qu'elle est depuis le milieu jusqu'au point A; au delà de l'image géométrique, l'intensité diminue encore progressivement et d'une façon continue jusqu'à ce que l'on se soit assez éloigné pour que l'autre bord de la section méridienne du solide de diffraction coïncide avec le bord géométrique de l'image.

Ainsi, vers les extrémités de la ligne lumineuse, et avant que ses limites géométriques soient atteintes, l'intensité cesse d'être constante : une portion de la lumière est rejetée en dehors, et il se

Fig. 4.




produit une *zone de lumière diffractée,* d'étendue d'autant plus grande que l'ouverture de la lunette est plus petite, dont une partie est inté-

rieure à la ligne, l'autre partie lui étant extérieure, et où l'intensité lumineuse décroît d'une façon continue.

J'ai calculé dans la Table D, et représenté dans la *fig.* 4, les valeurs de l'intensité lumineuse dans la partie de cette zone de lumière diffractée extérieure à la fente elle-même : l'intensité au bord géométrique est prise pour unité.

TABLE D.

| *n.* | Intensité. | *n.* | Intensité. |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 6,0 | 0,0067 |
| 2 | 0,48825 | 6,2 | 58 |
| 4 | 7673 | 4 | 54 |
| 6 | 6618 | 6 | 51 |
| 8 | 5525 | 8 | 50 |
| 1,0 | 4564 | 7,0 | 49 |
| 2 | 3701 | 2 | 49 |
| 4 | 2940 | 4 | 48 |
| 6 | 2287 | 6 | 47 |
| 8 | 1742 | 8 | 44 |
| 2,0 | 1328 | 8,0 | 41 |
| 2 | 0,0973 | 2 | 36 |
| 4 | 689 | 4 | 31 |
| 6 | 500 | 6 | 27 |
| 8 | 371 | 8 | 22 |
| 3,0 | 291 | 9,0 | 18 |
| 2 | 245 | 2 | 15 |
| 4 | 222 | 4 | 13 |
| 6 | 214 | 6 | 12 |
| 8 | 213 | 8 | 11 |
| 4,0 | 212 | 10,0 | 11 |
| 2 | 209 | 2 | 11 |
| 4 | 206 | 4 | 10 |
| 6 | 189 | 6 | 10 |
| 8 | 172 | 8 | 10 |
| 5,0 | 153 | 11,0 | 0,0008 |
| 2 | 132 | 2 | 7 |
| 4 | 112 | 4 | 5 |
| 6 | 0,0094 | 6 | 4 |
| 8 | 79 | 8 | 2 |
| 6,0 | 0,0067 | 12,0 | 0,0001 |

2° *Sur une direction perpendiculaire à la ligne lumineuse.* — Pour plus de simplicité, supposons la ligne lumineuse infiniment longue. L'intensité sera alors la même en tous les points d'une droite parallèle

à la source; elle y sera égale à l'aire de la section faite dans le solide de diffraction par un plan mené parallèlement à celui de la section méridienne, à une distance de l'axe égale à celle de la droite et de la source.

TABLE E.

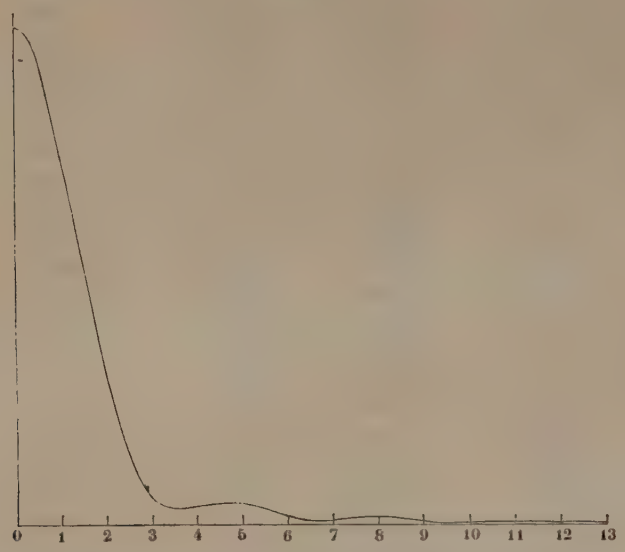
| $n$ | Intensité. | $n$ | Intensité. |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 6,6 | 0,0091 |
| 2 | 0,9769 | 8 | 86 |
| 4 | 9562 | 7,0 | 90 |
| 6 | 9015 | 2 | 0,0104 |
| 8 | 8534 | 4 | 109 |
| 1,0 | 7676 | 6 | 114 |
| 2 | 6764 | 8 | 118 |
| 4 | 5843 | 8,0 | 124 |
| 6 | 4910 | 2 | 115 |
| 8 | 3977 | 4 | 112 |
| 2,0 | 3176 | 6 | 0,0091 |
| 2 | 2386 | 8 | 73 |
| 4 | 1792 | 9,0 | 65 |
| 6 | 1290 | 2 | 41 |
| 8 | 0,0835 | 4 | 26 |
| 3,0 | 576 | 6 | 24 |
| 2 | 376 | 8 | 26 |
| 4 | 300 | 10,0 | 28 |
| 6 | 299 | 2 | 33 |
| 8 | 305 | 4 | 36 |
| 4,0 | 344 | 6 | 42 |
| 2 | 373 | 8 | 45 |
| 4 | 401 | 11,0 | 48 |
| 6 | 416 | 2 | 47 |
| 8 | 417 | 4 | 45 |
| 5,0 | 404 | 6 | 43 |
| 2 | 370 | 8 | 32 |
| 4 | 309 | 12,0 | 15 |
| 6 | 256 | 2 | 12 |
| 8 | 224 | 4 | 0,0009 |
| 6,0 | 164 | 6 | 6 |
| 2 | 137 | 8 | 3 |
| 4 | 0,0109 | 13,0 | 0,0001 |

La Table E donne les aires de ces différentes sections pour des distances $n$ à l'axe qui croissent de 2 dixièmes en 2 dixièmes : elle montre que, de part et d'autre de l'image géométrique de la fente, l'intensité lumineuse d'abord graduellement décroissante, à mesure

que l'on s'éloigne de l'image géométrique, passe bientôt, comme dans le cas d'un point lumineux, par une série de minima et de maxima. Mais il y a entre les deux cas une différence profonde ; avec une fente lumineuse, l'intensité n'est pas nulle dans les points qui correspondent aux minima.

Ces conclusions sont représentées graphiquement dans la *fig.* 5 et

Fig. 5.




résumées dans le tableau suivant, qui renferme les valeurs de $n$ correspondantes aux maxima et minima successifs, ainsi que l'intensité lumineuse en chacun de ces points par rapport à celle de la ligne elle-même que nous prenons pour unité :

| | $n$ | Intensité. |
|---|---|---|
| Sur la ligne elle-même | 0,00 | 1 |
| Premier minimum | 3,55 | $\frac{1}{34}$ |
| Premier maximum | 4,65 | $\frac{1}{24}$ |
| Second minimum | 6,80 | $\frac{1}{115}$ |
| Second maximum | 8,00 | $\frac{1}{80}$ |
| Troisième minimum | 9,60 | $\frac{1}{419}$ |
| Troisième maximum | 11,00 | $\frac{1}{208}$ |
| Quatrième minimum | 13,20 | $\frac{1}{10000}$ |

Il convient de remarquer que le premier minimum est ici plus voisin de l'image géométrique qu'il ne l'est dans le cas d'un point lumi-

neux. Cette conclusion de la théorie est entièrement d'accord avec les expériences de Fraunhofer (1).

Lorsque la source lumineuse est une droite de longueur finie, les franges latérales dont nous venons de parler ne sont plus rectilignes dans toute leur étendue, mais aux extrémités de l'image géométrique elles s'inclinent en se rapprochant de cette droite; en même temps, leur éclairement diminue progressivement, et elles se fondent insensiblement dans la zone de lumière diffractée, en paraissant former autour de l'image géométrique comme une sorte d'anneau continu.

*Les dimensions angulaires de la source sont comparables à celles du solide de diffraction.*

Si la source, au lieu d'être réduite à une simple ligne, est une fente de plus en plus large, les apparences lumineuses qui viennent d'être indiquées se transforment d'une façon continue. L'intensité en un point du plan focal est alors proportionnelle, non plus à la surface d'une section du solide de diffraction, mais à la portion du volume de ce solide comprise entre deux de ces sections de plus en plus distantes l'une de l'autre, à mesure que la largeur de la fente va en augmentant.

Les phénomènes sont donc les suivants :

Sur la ligne médiane de l'image géométrique de la fente, l'intensité lumineuse est maximum; elle décroît ensuite immédiatement de part et d'autre de cette ligne d'une façon progressive pour aboutir, au delà des limites de l'image géométrique, à une série de maxima et de minima, dont les intensités diffèrent d'autant moins de celles des parties voisines que le diamètre angulaire de la fente est lui-même plus grand. Lorsque ce diamètre angulaire est devenu égal à celui du solide de diffraction caractéristique de l'ouverture employée, toute trace de maxima ou de minima lumineux a disparu dans le plan focal; l'éclairement y varie alors d'une façon continue depuis le milieu de l'image géométrique jusqu'à ce qu'il devienne insensible.

De même, l'image d'un disque lumineux, dont le diamètre angulaire augmente progressivement, sera d'abord un disque dans lequel l'in-

(1) *Nouvelle modification de la lumière.*

tensité décroîtra progressivement à partir du centre, et qui sera entouré d'anneaux relativement obscurs et brillants, mais qui se distingueront de moins en moins, à mesure que le diamètre apparent de la source ira en augmentant; pour une certaine limite analogue à la précédente, toute trace de maxima et de minima aura disparu, et l'image focale se réduira à un disque lumineux où l'éclairement ira progressivement en décroissant depuis le centre où il sera maximum jusqu'au bord où il sera insensible.

Tous ces faits sont faciles à vérifier par l'expérience : il suffit de prendre pour source lumineuse une ouverture angulaire taillée dans une feuille de tôle, recouverte de papier végétal et fortement éclairée. On voit alors toujours des franges brillantes au sommet de l'angle lumineux; mais leur longueur, parallèle aux côtés, diminue progressivement à mesure qu'on augmente l'ouverture de la lunette avec laquelle on observe.

*Le diamètre apparent de la source est très-grand dans toutes les directions.*

Nous examinerons maintenant le cas véritablement utile en Astronomie, celui où le diamètre apparent de la source est très-grand dans toutes les directions; et pour préciser, nous supposerons que ce diamètre soit assez grand pour qu'on puisse, en chaque point, considérer comme rectilignes les bords de la source lumineuse.

En appliquant le théorème général que nous avons énoncé en commençant, on voit aisément que l'image focale de la source se compose alors de deux portions : l'une semblable à son image géométrique, dépendant de sa forme et de ses dimensions apparentes, mais d'autant plus grande que l'ouverture employée est plus grande, et où l'éclairement est constant et maximum; l'autre, contiguë à la première, lui faisant suite et l'entourant de toutes parts, dont la forme varie avec celle de la source, mais dont l'étendue angulaire ne dépend que de la grandeur de l'ouverture employée: cette seconde portion de l'image focale empiète en partie sur l'image géométrique, et l'éclairement y va en décroissant progressivement jusqu'à ce que, après avoir été réduit à moitié aux limites de l'image géométrique, il devienne bientôt complétement insensible.

Dans une lunette ou dans un télescope, l'image géométrique de toute source lumineuse d'un diamètre apparent suffisamment considérable se trouve donc accompagnée d'une *zone de lumière diffractée* d'étendue angulaire variable avec l'ouverture de l'instrument; et, pour trouver l'intensité lumineuse aux différents points de cette zone, il faut, dans le cas qui nous occupe, calculer les portions successives du volume du solide de diffraction séparées par un plan, qui se déplace parallèlement à lui-même et à l'axe de ce solide depuis l'un de ses bords jusqu'à l'autre.

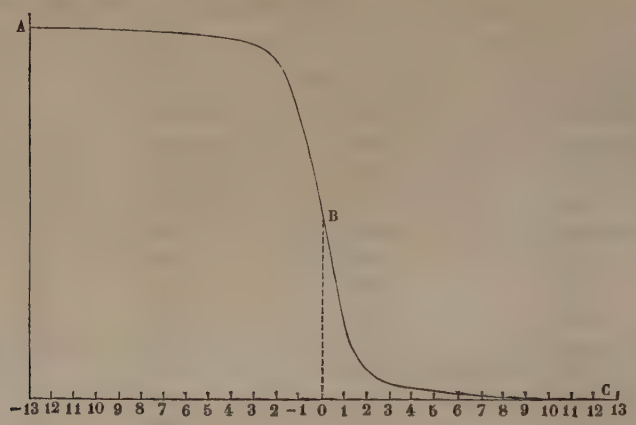
TABLE F.

| *n* | Intensité. | *n* | Intensité. | *n* | Intensité. | *n* | Intensité. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 13,0 | 1,0000 | — 6,4 | 0,9893 | 0,0 | 0,5000 | 6,6 | 0,0102 |
| 12,8 | 0000 | 2 | 9886 | 2 | 4440 | 8 | 97 |
| 6 | 0000 | 6,0 | 9877 | 4 | 3882 | 7,0 | 92 |
| 4 | 0,9999 | 5,8 | 9866 | 6 | 3364 | 2 | 87 |
| 2 | 9999 | 6 | 9853 | 8 | 2867 | 4 | 81 |
| — 12,0 | 9998 | 4 | 9836 | 1,0 | 2407 | 6 | 73 |
| 11,8 | 9997 | 2 | 9817 | 2 | 1997 | 8 | 68 |
| 6 | 9996 | 5,0 | 9795 | 4 | 1640 | 8,0 | 61 |
| 4 | 9993 | 4,8 | 9771 | 6 | 1335 | 2 | 54 |
| 2 | 9990 | 6 | 9749 | 8 | 1083 | 4 | 48 |
| 11,0 | 9989 | 4 | 9726 | 2,0 | 880 | 6 | 42 |
| 10,8 | 9987 | 2 | 9704 | 2 | 722 | 8 | 38 |
| 6 | 9983 | 4,0 | 9684 | 4 | 604 | 9,0 | 34 |
| 4 | 9980 | 3,8 | 9665 | 6 | 516 | 2 | 31 |
| 2 | 9979 | 6 | 9648 | 8 | 456 | 4 | 29 |
| 10,0 | 9977 | 4 | 9631 | 3,0 | 416 | 6 | 27 |
| 9,8 | 9975 | 2 | 9612 | 2 | 389 | 8 | 26 |
| 6 | 9974 | 3,0 | 9585 | 4 | 370 | 10,0 | 24 |
| 4 | 9972 | 2,8 | 9545 | 6 | 353 | 2 | 22 |
| 2 | 9970 | 6 | 9505 | 8 | 336 | 4 | 20 |
| 9,0 | 9967 | 4 | 9393 | 4,0 | 318 | 6 | 18 |
| 8,8 | 9963 | 2 | 9278 | 2 | 298 | 8 | 16 |
| 6 | 9958 | 2,0 | 9121 | 4 | 276 | 11,0 | 13 |
| 4 | 9953 | 1,8 | 8918 | 6 | 252 | 2 | 11 |
| 2 | 9947 | 6 | 8666 | 8 | 229 | 4 | 8 |
| 8,0 | 9940 | 4 | 8361 | 5,0 | 205 | 6 | 6 |
| 7,8 | 9933 | 2 | 8004 | 2 | 184 | 8 | 3 |
| 6 | 9926 | 1,0 | 7594 | 4 | 164 | 12,0 | 2 |
| 4 | 9919 | 0,8 | 7134 | 6 | 148 | 2 | 1 |
| 2 | 9913 | 6 | 6636 | 8 | 135 | 4 | 1 |
| 7,0 | 9908 | 4 | 6111 | 6,0 | 124 | 6 | 0 |
| 6,8 | 9903 | 2 | 5561 | 2 | 115 | 8 | 0 |
| 6 | 9898 | 0,0 | 0,5000 | 4 | 108 | 13,0 | 0,0000 |

La Table F donne les valeurs de l'intensité lumineuse, dans la zone de lumière diffractée, pour des distances $n$ comptées à partir de la ligne où l'éclairement cesse d'être constant et qui croissent de deux en deux dixièmes depuis $n = -13,0$ jusqu'à $n = +13,0$ (la valeur zéro de $n$ correspond aux limites de l'image géométrique).

La *fig.* 6 représente graphiquement l'ensemble du phénomène.

Fig. 6.




*Constante de diffraction instrumentale.*

L'étendue de la zone de lumière diffractée, dans laquelle l'intensité lumineuse est assez grande pour impressionner la rétine, dépend évidemment, toutes choses égales d'ailleurs, de l'éclat de l'astre observé. Mais, si celui-ci est assez brillant, on doit admettre que cette limite d'intensité est une fraction constante de l'intensité maximum de l'image focale, et, par suite, correspond à une même valeur de $n$, quelle que soit l'ouverture de la lunette qui sert aux observations. Ceci revient à dire que *le diamètre d'un astre suffisamment brillant et observé sur un fond identique varie avec l'ouverture de l'instrument employé.*

Admettons que dans cette zone diffractée nous cessions de percevoir la lumière dès que son intensité est le *trentième* de celle de la portion où l'éclairement est constant; nous conclurons des valeurs données dans la table F que l'image de la source sera limitée pour nous à la valeur de $n$ égale à $+3,8$, ce qui, pour un objectif de 10 centimètres

d'ouverture, correspond à une zone diffractée extérieure d'une étendue angulaire égale à 1″,4.

En d'autres termes, en vertu même des propriétés de l'agent lumineux au foyer d'un objectif aplanétique, le diamètre de l'image focale d'une source, dont l'étendue angulaire est suffisamment grande, est égal à son diamètre géométrique augmenté d'une certaine quantité variable avec l'ouverture de l'instrument, et qui pour un objectif de 10 centimètres atteint théoriquement la valeur de 2″,8.

Relativement à la mesure des diamètres des astres d'une certaine étendue angulaire, le Soleil, la Lune et les planètes, chaque objectif ou chaque miroir est donc caractérisé, comme pour la séparation des étoiles multiples, par une constante déterminée, qui diffère d'ailleurs de son pouvoir séparateur et qui varie, comme lui, avec l'intensité même de la source.

Nous appellerons cette nouvelle constante *constante de diffraction instrumentale*, pour bien en rappeler l'origine; et avec les hypothèses que nous avons faites et les restrictions qui les ont accompagnées, nous sommes autorisé à dire que, pour un objectif ou un miroir de 10 centimètres d'ouverture, sa valeur est

$$2'',8.$$

Une autre conséquence également importante découle immédiatement de la théorie qui précède. Lors du passage d'une planète, Vénus ou Mercure, sur le disque du Soleil, il existe pour celui-ci deux zones de lumière diffractée : la zone extérieure dont nous venons de parler et, en outre, une zone intérieure qui empiète sur la planète elle-même. Le diamètre de Vénus ou de Mercure, mesuré pendant le passage, devra donc être toujours plus petit que dans les conditions ordinaires d'observation; et, de plus, ce diamètre sera d'autant plus petit que l'ouverture de l'instrument sera moindre, la variation étant égale à la différence des constantes de diffraction instrumentale des instruments employés.

La vérification de ces deux lois a été faite comme il suit.

### *Vérification expérimentale.*

*Premier mode de vérification.* — Dans une lame de cuivre, argentée et polie sur une de ses faces, j'ai fait tailler une ouverture rectangulaire

à arêtes bien rectilignes et de 2 centimètres de haut sur $1^c,5$ de large. On éclairait cette ouverture avec la lumière d'une lampe Drummond, tantôt par derrière pour avoir une source lumineuse directe, tantôt en avant et par réflexion pour avoir l'analogue d'une planète sur le disque du Soleil; on a obtenu ainsi :

| Ouverture en centimètres. | Diamètre. Éclairage direct. | Diamètre. Éclairage réfléchi. | Différence des diamètres. |
|---|---|---|---|
| 6,5 | 35",53 | 30",76 | 4",77 |
| 1,7 | 39,62 | 26,93 | 12,69 |
| 6,5 | 37,12 | 30,26 | 6,86 |
| 2,9 | 38,67 | 29,80 | 8,87 |
| 1,7 | 42,05 | 27,54 | 14,51 |

*Second mode de vérification.* — Dans une lame de laiton noircie, j'ai fait pratiquer deux ouvertures rectangulaires de 3 centimètres de haut sur $1^c,5$ de large, séparées par un espace de $1^c,5$, et dont les bords étaient bien rectilignes et taillés en biseau. En éclairant cette lame par derrière avec la flamme d'une lampe Drummond, on avait ainsi deux sources lumineuses d'un certain diamètre apparent, séparées l'une de l'autre par un intervalle obscur. Le diamètre extérieur était celui d'une source lumineuse directe; le diamètre intérieur correspondait évidemment au cas d'une planète mesurée sur le Soleil.

Cette disposition expérimentale était d'ailleurs préférable à la précédente, car, pour les deux diamètres, les conditions d'éclairement étaient identiques; j'ai obtenu ainsi, avec une excellente lunette de 4 pouces qui m'a été prêtée par MM. Brunner :

| Ouverture en centimètres. | Diamètre extérieur. | Diamètre intérieur. |
|---|---|---|
| 6,5 | 121",15 | 36",13 |
| 3,0 | 122,17 | 34,48 |
| 1,7 | 125,86 | 31,46 |

Avec une autre lunette de 4 pouces, de foyer un peu plus long, on a eu :

| Ouverture en centimètres. | Diamètre extérieur. | Diamètre intérieur. |
|---|---|---|
| 5,1 | 131",20 | 39",63 |
| 2,4 | 134,98 | 37,18 |
| 1,2 | 141,51 | 31,58 |

On pourrait objecter à ce mode d'observation que, en réduisant ainsi à 2 centimètres l'ouverture d'une lunette de 4 ou 6 pouces, on se met complétement en dehors des conditions ordinaires d'observation; et que, d'autre part, le foyer de cette petite portion de l'objectif diffère peut-être du foyer correspondant à une ouverture plus grande. J'ai fait, pour répondre à ces objections, les deux séries d'expériences qui suivent :

1° J'ai comparé entre elles différentes lunettes, en leur laissant une ouverture relativement grande. Voici les résultats obtenus :

| | | Diamètre extérieur. | Diamètre intérieur. |
|---|---|---|---|
| Lunette de Rossi | 16c,6 | 119",58 | 36",278 |
| Lunette de Brunner, réduite à | 6,6 | 125,20 | 34,70 |
| Lunette de Rossi [1], ouverture réduite à | 11,5 | 99,10 | 27,56 |
| Petite lunette de Brunner, ouverture entière | 6,0 | 102,64 | 20,12 |

Le sens du phénomène est, on le voit, toujours le même; et même les différences sont plus considérables que celles que nous avions obtenues en diaphragmant une lunette déterminée.

2° J'ai cherché l'effet que peut produire une variation considérable et graduée du foyer, lorsque l'ouverture d'une lunette de long foyer est réduite dans une proportion considérable.

J'ai pris, dans ce but, l'une des lunettes de 4 pouces qui avaient servi à l'observation du passage de Vénus à Nouméa, et, après avoir déterminé avec soin les positions de son foyer, pour chacun des diaphragmes employés, je l'ai diaphragmé jusqu'à ne lui plus laisser en son centre qu'une ouverture de 1c,2. Faisant alors varier le foyer de 5 centimètres en 5 centimètres, j'ai mesuré le diamètre extérieur et intérieur de la double fente; j'ai obtenu ainsi les résultats suivants :

| | *Position du foyer.* | Division du tirage. |
|---|---|---|
| Ouverture entière | 10c,0 | 40,0 |
| » réduite à | 5,1 | 40,0 |
| » » | 2,4 | 40,5 |
| » » | 1,2 | 40,7 |

[1] Dans cette expérience, la distance entre la lunette et la double fente avait été considérablement augmentée.

*Mesure des diamètres avec l'ouverture de* 1°,2.

| Division du tirage. | Diamètre extérieur. | Diamètre intérieur. |
|---|---|---|
| 10 | 134″,25 | 34″,22 |
| 20 | 138,25 | 31,68 |
| 25 | 137,93 | 30,96 |
| 30 | 139,84 | 30,18 |
| 35 | 140,77 | 31,57 |
| 40 | 140,84 | 30,97 |
| 45 | 141,82 | 30,11 |
| 50 | 142,01 | 31,17 |
| 55 | 140,26 | 31,04 |
| 60 | 137,61 | 34,00 |

Aux divisions extrêmes 10 et 60 du tirage, l'image avait complétement perdu sa netteté, et les pointés étaient fort incertains. Si l'on néglige les mesures faites dans ces deux positions, les autres diffèrent peu l'une de l'autre, et les valeurs qui correspondent au foyer adopté coïncident presque exactement avec les moyennes

$$140'',21, \quad 31'',08$$

des diamètres obtenus successivement.

Il importe d'ailleurs de remarquer que l'éclat de la source lumineuse a dans ce cas encore une grande influence. Ainsi, en plaçant en avant de notre double fente un verre vert assez foncé, de manière à réduire notablement l'intensité de la lumière incidente, nous avons constaté que le diamètre variait beaucoup moins avec l'ouverture, et même était sensiblement constant. C'est ce que montrent les nombres suivants :

| Ouverture en centimètres. | Diamètre extérieur. | Diamètre intérieur. |
|---|---|---|
| 11,5 | 120″,495 | 36″,359 |
| 3,2 | 119,675 | 35,058 |

*Remarque.* — Lorsque, en diaphragmant l'objectif d'une quelconque des lunettes que j'ai employées, j'en réduisais l'ouverture à n'avoir plus que 5 à 6 centimètres, j'ai toujours vu les deux rectangles lumineux de la double fente entourés d'une ou plusieurs franges brillantes

dont le nombre, la largeur et l'éloignement du bord lumineux du rectangle allaient en augmentant à mesure que l'ouverture diminuait.

Ce phénomène, déjà aperçu par Baden Powell lors de ses recherches sur l'irradiation [1], résulte immédiatement de la théorie qui précède, et a été expliqué plus haut dans tous ses détails.

## II. — VÉRIFICATION ASTRONOMIQUE.

### *Passages de Mercure et de Vénus.*

L'une des conditions essentielles que l'on doit rechercher, si l'on veut trouver dans les observations astronomiques la vérification de la loi que nous venons d'énoncer, est de ne comparer entre elles que les observations faites dans les mêmes conditions d'éclairement. Telles sont les mesures obtenues avec des instruments d'ouvertures différentes, mais de construction identique, lors d'un même passage de Vénus ou de Mercure sur le disque du Soleil.

Malheureusement, malgré toutes les difficultés et les causes d'erreurs que mirent en évidence les observations des deux premiers passages de Vénus, bien peu d'astronomes pensèrent au parti que l'on pouvait tirer, pour résoudre ces difficultés, de l'observation bien préparée des passages sur le Soleil de la planète Mercure.

Aussi ces passages, quoique se reproduisant très-fréquemment, n'ont été observés avec soin que depuis une époque relativement récente, et ils ne peuvent nous fournir, au point de vue qui nous occupe, tous les renseignements qu'on aurait pu en attendre.

Nous examinerons donc d'abord les observations faites lors des passages de Vénus du 6 juin 1761 et du 3 juin 1769.

A cette époque, les seuls instruments que l'on sût construire à peu près exempts de défauts étaient les télescopes de petite ouverture; en comparant leurs résultats, nous admettrons, ce qui ne saurait s'éloigner beaucoup de la vérité, que le rapport de la distance focale (seul renseignement que donnent alors en général les observateurs) à l'ouverture soit un nombre constant pour tous.

---

[1] *On Irradiation*, by the Rev. Baden Powell. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. XVIII, p. 69 et suiv.

Nous trouvons ainsi, pour les diamètres mesurés micrométriquement :

*Passage de Vénus en* 1761 (1).

| Observateur. | Distance focale du télescope. | Diamètre mesuré. | | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | p | | | |
| Mallet..... ..... | 1,5 | 57″,5 | 57″,75 | 16″,310 |
| Canton..... | 1,5 | 58,0 | | |
| Short..... | 2,0 | 59,1 | 59,30 | 16,812 |
| Mason et Dixon..... | 2,0 | 59,6 | | |

*Passage de Vénus en* 1769 (2).

| Observateur. | Distance focale de l'instrument. | Diamètre mesuré. | | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| Maskelyne... | Télescope de 2 pieds..... | 55″,75 | 55″,78 | 16″,103 |
| Cook..... | » 2 » ..... | 56,40 | | |
| Green..... | » 2 » ..... | 54,90 | | |
| Rittenhouse.. | Réfracteur de 3 pouces d'ouverture. | 57,30 | | 16,552 |
| Hornsley.... | Réfracteur de 12 pieds..... | 58,10 | | 16,783 |

Les observations de quelques-uns des passages de Mercure peuvent également nous servir.

*Passage de Mercure du* 4 *au* 5 *mai* 1832.

| Observateur. | Instrument. | | Diamètre mesuré. | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| Bessel (3)..... | Héliomètre... | 0m,160 | 11″,987 | 6″,697 |
| Gambart (4).... | Équatorial... | 0 ,070 | 9,290 | 5,184 |

*Passage de Mercure du* 8 *mai* 1845.

| Observateur. | Instrument. | | Diamètre mesuré. | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | | m | | |
| J. Schmidt (5).. | Lunette..... | 0,068 | 10″,853 | 6″,057 |
| Mädler (6)..... | Équatorial... | 0,244 | 11,754 | 6,542 |
| Mitchel..... | Équatorial... | 0,265 | 11,580 | 6,522 |

(1) *Die Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgange von* 1761, hergeleitet von J.-F. Encke, Vice-Director der Sternwarte Seeberg, p. 74.

(2) *Philosophical Transactions* pour 1769, 1770 et 1771.

(3) *Astronomische Nachrichten,* vol. X, n° 228.

(4) *Astronomische Nachrichten,* vol. X, n° 332.

(5) Ce diamètre est déduit de la moyenne des durées d'un grand nombre de passages de la planète derrière les fils du micromètre (*Astronomische Nachrichten,* vol. LVI, n° 1340).

(6) *Astronomische Nachrichten,* vol. XXIII.

*Passage de Mercure du* 8-9 *novembre* 1848.

| Observateur. | Ouverture. | Diamètre mesuré. |
|---|---|---|
| | m | ″ |
| Dawes (1)..... | 0,072 | 9,369 |
| Dawes..... | 0,102 | 9,389 |
| Arago (2)..... | 0,162 | 10,155 |

*Passage de Mercure du* 11 *novembre* 1861.

| Observateur. | Instrument. | | Diamètre mesuré. | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | | m | ″ | ″ |
| Hartnup (3)..... | Équatorial... | 0,102 | 9,91 | 6,705 |
| J. Schmidt (4)..... | » ... | | 10,163 | 6,877 |
| Ad. von Parpart (5).. | » ... | | 9,887 | 6,604 |

*Passage de Mercure du* 4 *novembre* 1868 (6).

| Observateur. | Instrument. | | Diamètre mesuré. | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | | m | ″ | ″ |
| C. Wolf..... | Équatorial.. | 0,204 | 9,430 | 6,367 |
| J. Plummer.... | » .. | 0,165 | 9,001 | 6,077 |
| O. Struve..... | » .. | 0,064 | 6,840 | 4,618 |

Je terminerai cette série de mesures par celles qui sont venues à ma connaissance relativement au dernier passage de Vénus.

*Passage de Vénus, du* 8-9 *décembre* 1874 (7).

| Observateur. | Instrument. | | Diamètre mesuré. | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | | m | ″ | ″ |
| Commandant Mouchez. | Équatorial.. | 0,217 | 64,385 | 16,992 |
| Colonel Tennant..... | » .. | 0,152 | 63,948 | 16,904 |

(1) Ces mesures ont été faites avec un équatorial de 8p,5 (anglais) de foyer, un micromètre à fils, un grossissement de 163 fois, et avec le même verre noir. L'objectif a été diaphragmé jusqu'à ne plus laisser en son centre que les ouvertures indiquées plus haut. (*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. IX, p. 21 et suiv.)

(2) *Œuvres complètes*, vol. XI, p. 315.

(3) *Astronomische Nachrichten*, vol. LVI, n° 1340 (1862).

(4) *Astronomische Nachrichten*, vol. LVI, n° 1343 (1862).

(5) *Astronomische Nachrichten*, vol. LVI, n° 1343 (1862).

(6) *Recherches sur les apparences singulières qui ont souvent accompagné l'observation des contacts de Mercure et de Vénus avec le bord du Soleil*, par MM. C. Wolf et C. André.

(7) M. le commandant Mouchez, chef de la mission de l'île Saint-Paul, a bien voulu me communiquer cette valeur du diamètre de Vénus. Les mesures du colonel Tennant se trouvent dans le vol. XXXI des *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, p. 345.

La vérification de la loi que nous cherchons à établir résulte du simple examen des tableaux qui précèdent; mais il y a plus, si, à l'aide des observations du passage de Mercure du 4 novembre 1868 et du passage de Vénus du 8-9 décembre 1874, on calcule la constante de diffraction instrumentale relative à une lunette de 10 centimètres d'ouverture, on trouve :

Pour le passage de Mercure... $2'',795$
Pour le passage de Vénus..... $2'',473$

valeurs qui s'accordent de la manière la plus satisfaisante avec le nombre que nous a donné la théorie. Ainsi, lorsqu'une planète, fonctionnant comme corps opaque, limite une portion d'une source lumineuse très-intense, comme le Soleil, son diamètre diminue à mesure que l'ouverture de l'instrument augmente et le *facteur de diffraction instrumentale*, relatif à ce cas, peut être pris égal à

$$2'',634.$$

*Observations de nuit des différentes planètes.*

Nous devons examiner maintenant les mesures des diamètres de planètes faites dans les conditions ordinaires d'observation, c'est-à-dire les mesures micrométriques faites avec un équatorial, la nuit, sur le fond obscur du ciel.

**Vénus.**

| Observateur. | Instrument. | | Micromètre. | Diamètre ramené à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | | m | | " |
| Robert Main (1), | Équatorial... | 0,170 | double image | 17,620 |
| Wichmann (2), | Héliomètre... | 0,162 | héliomètre | 17,392 |

(1) *On the values of the diameters of the planets having measurable disks, as determined with a double image micrometer attached to East Equatoreal of the Royal Observatory Greenwich.* (*Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. XXV, p. 21 et suiv.)

(2) *Messungen von Durchmessers mit dem Königsbergen Heliometer; Astronomische Nachrichten*, vol. XXXII, n° 749 (1851).

**Jupiter.**

| Observateur. | Instrument. | | Micromètre. | Diamètre ramené à la distance moyenne de Jupiter au Soleil = 5,20279. Équatorial. | | Polaire. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | | | |
| Julius Schmidt (1), | Équatorial. | 0,108 | à fils | 38″,910 | | 36″,418 | |
| Kaiser (2), | » | 0,162 | double image | 37,546 | 38″,545 | 35,149 | 36″,523 |
| Th.-J. Hussey (3), | » | 0,175 | double image | 39,543 | | 37,897 | |
| Struve (4), | » | 0,254 | à fils | 38,327 | | 35,538 | |
| Secchi (5), | » | 0,244 | à fils | 38,355 | | 35,961 | |
| H.-W. Brandes (6), | Héliomètre. | 0,162 | héliomètre | » | | 36,469 | |

J'ajouterai que Temple Chevallier observant avec le cercle méridien de l'Observatoire de Durham ($0^m$,087 d'ouverture), en 1843, 1844 et 1845, le temps du passage au méridien de la planète Jupiter, a trouvé son diamètre plus grand de 1″,035 que celui donné alors par le *Nautical*, et dérivé d'observations faites avec des instruments de plus grande ouverture (7).

Quoique la variation du diamètre avec l'ouverture de l'instrument apparaisse autant qu'on pouvait l'espérer, vu le peu d'éclat de Jupiter, ce n'est point là le fait le plus saillant qui ressorte des observations précédentes. Ce fait, que nous avons déjà signalé plus haut, est le suivant :

*Toujours le diamètre de Vénus, mesuré dans les conditions ordinaires d'observation, est plus grand, quelque grande que soit l'ouverture de l'instrument, que celui que l'on obtient lors des passages de cette planète sur le disque du Soleil.*

### *Observation de jour des di érentes planètes.*

Mais il y a plus, au lieu de prendre les diamètres de Mercure et de Vénus mesurés la nuit, considérons les résultats des observations faites

(1) *Astronomische Nachrichten*, vol. LXV, n° 1543 (1865).
(2) *Astronomische Nachrichten*, n° 1070 (1857).
(3) *Astronomische Nachrichten*, vol. XI, n° 264 (1833).
(4) *Astronomische Nachrichten*, vol. V, n° 97, et vol. VI, n° 260.
(5) *Astronomische Nachrichten*, vol. XLIII, n° 1017 (1855).
(6) *Astronomisches Jahrbuch*, für das Jahr 1824, von J.-E. Bode.
(7) *Astronomische Nachrichten*, vol. LXXVII, n° 642.

pendant le jour, nous aurons alors les valeurs suivantes :

**Mercure.**

| Observateur. | Instrument. | | Micromètre. | Diamètre réduit à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | | m | | ″ |
| Julius Schmidt (1), | Équatorial... | 0,108 | à fils | 6,454 |
| Robert Main (2), | » ... | 0,170 | double image | 6,890 |

**Vénus.**

| Observateur. | Instrument. | | Micromètre. | Diamètre ramené à l'unité de distance. |
|---|---|---|---|---|
| | | m | | ″ |
| J. Schmidt (3), | Équatorial... | 0,108 | à fils | 17,554 |
| Wichmann (4), | Héliomètre... | 0,162 | héliomètre | 17,225 |
| J. Plummer (5), | Équatorial... | 0,165 | double image | 17,050 |
| R. Main (6), | » ... | 0,170 | double image | 17,280 |
| Secchi (7), | » ... | 0,244 | à fils | 16,416 } 16″,992 |
| Beer et Mädler (8), | » ... | 0,244 | à fils | 17,568 } |
| Airy (9), | Observations méridiennes | | | 17,166 |

La comparaison de ce tableau avec les précédents conduit à cette conclusion que *le diamètre de Vénus mesuré pendant le jour est plus petit que celui que l'on obtient pendant la nuit avec un instrument de même ouverture.*

Ainsi la moyenne des valeurs données par Main et Wichmann pour les observations de nuit est

$$17'',506;$$

tandis que la moyenne des observations de jour de Main, Wichmann et Plummer est

$$17'',185.$$

---

(1) *Astronomische Nachrichten,* vol. LXV, n° 1543 (1865). Schmidt ne donne que le diamètre polaire de Mercure; c'est ce qui explique cette faible valeur.

(2) *Memoirs of the Royal astronomical Society,* vol. XXV, p. 21.

(3) *Astronomische Nachrichten,* vol. LXV. n° 1543 (1865).

(4) *Astronomische Nachrichten,* vol. XXXII, n° 749 (1851).

(5) *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* vol. XXXIII, p. 561.

(6) *Memoirs of the Royal astronomical Society,* vol. XXV, p. 22 et suiv.

(7) *Astronomische Nachrichten,* vol. XLIII, n° 1017 (1855).

(8) *Astronomische Nachrichten,* vol. XIV, n° 325 (1837).

(9) *Annales de l'Observatoire de Paris,* vol. VI, p. 26.

Je trouve d'ailleurs, dans le Mémoire de Wichmann, un fait du même ordre qui nous donnerait à lui seul l'explication de cette différence [1]. Dans les nuits des 28 février, 8 mars et 4 avril 1849, Wichmann a observé Vénus avec un verre un peu coloré en vert (*mattgrüner*); les valeurs qu'il a obtenues ainsi pour le diamètre de Vénus sont :

$$17'',19 \quad 17'',19 \quad \text{et} \quad 17'',27,$$

dont la moyenne

$$17'',117$$

est un peu plus faible que celle déduite des observations de jour faites avec la même ouverture.

Les observations de la Lune conduisent à une conclusion analogue. En discutant les observations de notre satellite, faites à la lunette méridienne ($0^m,135$ d'ouverture) de l'Observatoire de Washington pendant les années 1862, 1863, 1864 et 1865, M. S. Newcomb est arrivé à ce résultat que la différence moyenne entre les ascensions droites observées et les ascensions droites données par les Tables de Hansen n'est pas la même pour les observations faites le jour et pour celles faites la nuit. Tandis qu'elle est égale à $0^s,1535 = 2'',302$ dans le second cas, elle n'est plus que de $0^s,092 = 1'',380$ dans le premier [2]. La différence $0'',922$ est égale à l'excès du demi-diamètre instrumental de la Lune pendant la nuit sur son demi-diamètre pendant le jour, excès beaucoup plus grand dans ce cas que pour les observations de Vénus; ce fait est dû en partie à l'éclat plus grand de la Lune, en partie à la différence des deux procédés d'observation et des aberrations des lunettes.

La théorie que nous avons donnée plus haut explique immédiatement ces différences et les faisait même prévoir. Dès qu'augmente la lumière du fond sur lequel se détache l'astre dont on veut mesurer le diamètre, ou bien encore à mesure que diminue l'intensité lumineuse de cet astre lui-même, à mesure aussi diminue l'étendue angulaire de la portion de la zone de lumière diffractée, ou l'intensité lumineuse est assez forte pour faire impression sur la rétine. Ce phénomène est tout à fait analogue à celui dont nous avons démontré l'existence dans le

---

(1) *Astronomische Nachrichten*, vol. XXXII, n° 749 (1851).
(2) *Washington observations for* 1865. (*Appendix II*, p. 24.)

cas de l'image d'un point lumineux, phénomène qui fait aussi varier le pouvoir séparateur d'un objectif à mesure que varie l'intensité lumineuse des étoiles que l'on observe avec lui.

Ainsi, par exemple, pour expliquer cette différence de 1″,84 entre les valeurs du diamètre de la Lune obtenues à l'aide des observations de nuit et celles de jour, il suffit d'admettre que l'intensité lumineuse du fond du ciel est environ dix fois plus grande pendant le jour que pendant la nuit.

C'est aussi pour cette raison, en grande partie du moins, que les diamètres de Vénus ou de Mercure, mesurés lors d'un passage, sont plus grands avec un héliomètre qu'avec une lunette ordinaire de même ouverture [1], l'intensité lumineuse étant quatre fois moins grande avec le premier instrument qu'avec le second.

Il convient d'ailleurs de remarquer que, sauf une seule exception dont nous avons expliqué l'origine, *tous les diamètres de Vénus ou de Mercure, mesurés, soit pendant la nuit, soit pendant le jour, sont plus grands que ceux obtenus lors des passages de ces deux planètes sur le disque du Soleil.*

*Conclusion.* — Pour pouvoir comparer entre elles les observations de la Lune faites pendant le jour avec celles faites la nuit, il faut augmenter le diamètre relatif aux premières d'une quantité tenant à la *différence* de la correction de *diffraction instrumentale* dans les deux cas, variant en raison inverse de l'ouverture de l'instrument employé et qui, d'après les observations de Washington, serait voisine de

$$2'',0$$

pour un objectif de 10 centimètres.

C'est aussi dans ce sens que doivent être interprétées les règles empiriques suivies actuellement pour la réduction des observations de Mercure, de Vénus et de Mars [2].

---

[1] Voir, dans les *Recherches sur l'observation des contacts de Mercure et de Vénus avec le Soleil*, le Tableau des valeurs du diamètre de Mercure obtenues lors du passage du 4 novembre 1868.

[2] *Observations made at the Royal Observatory Greenwich*, 1838 : *Introduction*, p. LII. — *Annales de l'Observatoire de Paris*. (*Voir*, dans le Préambule de chaque volume d'observations, l'article relatif à l'observation des planètes.)

*Historique et vérification directe.*

Cet agrandissement de l'image d'un corps planétaire par suite de la diffraction a été démontré autrefois par Schwerd [1], et signalé par Bessel à l'attention des astronomes. Dans une lettre adressée par lui à de Humboldt, on lit : « Les étoiles ont des disques factices dans les meilleures lunettes; il n'est pas douteux que l'agrandissement des disques n'ait aussi lieu pour les planètes ».

« Une décision aussi formelle, dit Arago [2], émanant d'une telle autorité, m'imposait le devoir de rechercher, dans nos anciennes mesures micrométriques, de combien on s'éloignerait des dimensions réelles des astres en se fondant sur leurs dimensions apparentes. »

Ce célèbre astronome cite alors des mesures faites par lui en 1800 et 1812 sur Vénus et d'autres observations faites par Laugier en 1851 sur Jupiter qui donnèrent pour les diamètres de ces deux planètes des valeurs sensiblement constantes, soit qu'on les observât avec l'ouverture entière de la lunette ($0^m,162$) soit qu'on les mesurât avec une ouverture réduite jusqu'à 3 centimètres.

J'ai repris ces observations à l'équatorial de la tour de l'Ouest de l'Observatoire de Paris, non point que je soupçonnasse l'exactitude des résultats indiqués par deux observateurs aussi consciencieux, mais pour me rendre compte des causes qui pouvaient produire un fait aussi contradictoire avec la théorie.

J'ai été amené à conclure que la constance même du diamètre de la planète dans les conditions indiquées, loin de contredire la théorie, ne faisait que la confirmer. En même temps que, par suite de la diffraction, l'interposition du diaphragme agrandit l'image focale, elle diminue, en effet, et dans une proportion considérable, l'intensité lumineuse, déjà faible d'ailleurs, de cette image; de sorte que, si les deux effets n'étaient point simultanés, le diamètre mesuré devrait nécessairement se trouver diminué avec une aussi petite ouverture.

L'expérience suivante faite dans la chambre noire prouve la vérité de cette explication.

---

(1) *Beugungserscheinungen.*

(2) *Œuvres complètes*, vol. XI, p. 313.

En éclairant avec une simple bougie la double fente dont j'ai parlé plus haut, et que j'avais recouverte de papier végétal, j'obtenais un éclairement plus fort que celui que m'avait donné la veille la planète Jupiter observée avec l'ouverture entière ($0^m,32$) de l'équatorial de la tour de l'Ouest. J'en mesurais alors le diamètre.

1° Avec une ouverture de..... $6^c,0$
2° Avec une ouverture de..... $2^c,4$

et j'obtins les deux valeurs

$$37'',39 \quad \text{et} \quad 36'',67$$

sensiblement constantes, tandis que, comme on l'a vu plus haut, ces valeurs différaient notablement lorsque la fente était fortement éclairée.

D'ailleurs, si l'on ne peut, soit à cause de la forme dissymétrique de la planète, soit à cause de son peu d'éclat et des ondulations, vérifier ainsi la variation de son diamètre avec le changement d'ouverture de la lunette, on peut arriver à produire une autre conséquence immédiate de la théorie. J'ai dit plus haut que, lorsque le diamètre apparent de la source était assez faible comparativement à l'ouverture, l'image focale de cette source était entourée d'une ou plusieurs franges lumineuses, nettement séparées d'elle par un intervalle relativement obscur. C'est ce que j'ai vérifié sur la planète de Vénus, au moyen du grand équatorial de la tour de l'ouest de l'Observatoire de Paris. En réduisant son ouverture à 4 centimètres, j'ai vu, lorsque l'atmosphère était favorable, à une certaine distance du bord bien terminé de la planète, et séparée de lui par un intervalle sensiblement obscur, une frange un peu large et colorée sur ses bords. En augmentant l'ouverture à $6^{cm},5$, la frange se rétrécit et se rapproche de la planète; avec une ouverture de 13 centimètres, elle disparaît complétement. Si l'on réduit l'ouverture jusqu'à $2^c,4$, le phénomène perd toute netteté, et il devient impossible de rien affirmer. D'ailleurs, l'interposition d'un écran annulaire permet d'obtenir des franges analogues plus belles et plus nombreuses : ce sera une vérification nouvelle de la théorie.

## III. — ÉCRAN ANNULAIRE.

Lorsqu'on recouvre au moyen d'un écran la partie centrale d'un objectif ou d'un miroir, de façon à n'en laisser nue, vers les bords,

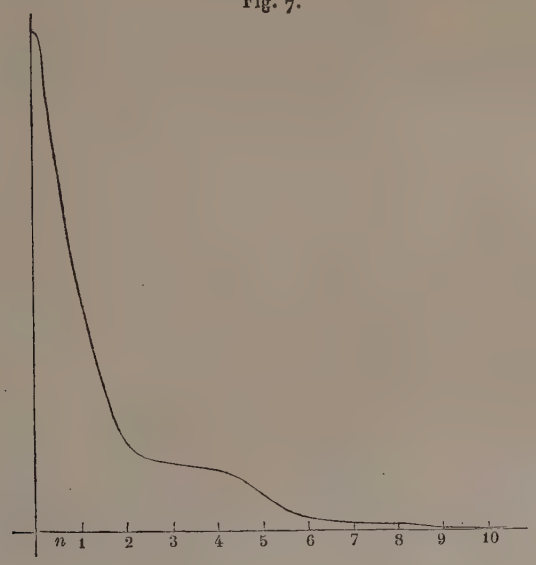
qu'une portion annulaire, on augmente le pouvoir séparateur de cet objectif ou de ce miroir. On serait donc porté à croire qu'on diminue, par cela même, la valeur de la constante de diffraction instrumentale qui lui correspond.

En réalité l'inverse a lieu, et cette constante se trouve ainsi augmentée. Cet exemple est une nouvelle preuve que la constante de diffraction instrumentale est une caractéristique différente et indépendante du pouvoir séparateur, dont celui-ci n'est, pour ainsi dire, qu'un cas particulier.

C'est qu'en effet l'interposition d'un écran central a modifié la forme du solide de diffraction, en augmentant le volume relatif des parties qui sont situées au delà du premier minimum. Les phénomènes de diffraction sont dès lors fort amplifiés, relativement à ce qu'ils sont lorsque l'ouverture est entière.

Pour le prouver, j'étudierai avec détail le cas particulier où le diamètre de l'écran central est la moitié de celui de l'ouverture entière.

Fig. 7.




*La source lumineuse est une fente infiniment petite, une droite lumineuse.*

J'adopterai le même ordre que plus haut.

1° *Le point dont on veut connaître l'éclairement est situé sur la ligne*

*lumineuse ou sur son prolongement.* — Les intensités en ces différents points, égales aux portions successives de l'aire de la section méridienne du solide de diffraction, sont données par la Table F, et représentées graphiquement par la *fig.* 7, où l'intensité au bord géométrique de la fente est prise pour unité.

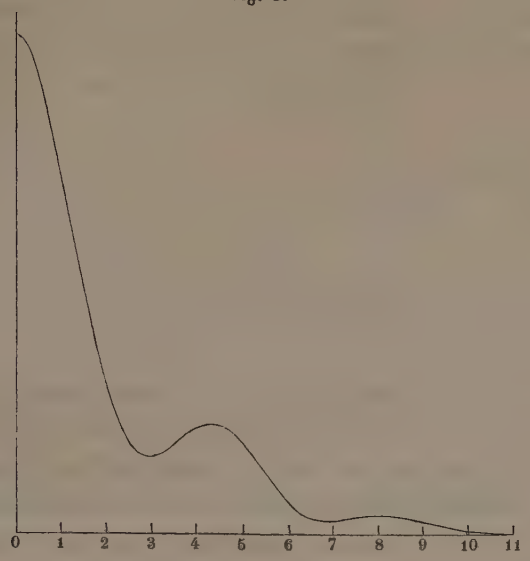
TABLE F.

| *n.* | Intensité. | *n.* | Intensité. |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 6,0 | 0,0222 |
| 2 | 8774 | 2 | 183 |
| 4 | 7617 | 4 | 159 |
| 6 | 6516 | 6 | 145 |
| 8 | 5479 | 8 | 138 |
| 1,0 | 4563 | 7,0 | 135 |
| 2 | 3763 | 2 | 134 |
| 4 | 3083 | 4 | 130 |
| 6 | 2529 | 6 | 126 |
| 8 | 2094 | 8 | 118 |
| 2,0 | 1769 | 8,0 | 107 |
| 2 | 1555 | 2 | 0,0094 |
| 4 | 1406 | 4 | 80 |
| 6 | 1336 | 6 | 66 |
| 8 | 1291 | 8 | 51 |
| 3,0 | 1279 | 9,0 | 36 |
| 2 | 1275 | 2 | 27 |
| 4 | 1269 | 4 | 18 |
| 6 | 1252 | 6 | 11 |
| 8 | 1217 | 8 | 0,0007 |
| 4,0 | 1152 | 10,0 | 4 |
| 2 | 1067 | 2 | 2 |
| 4 | 0,0996 | 4 | 2 |
| 6 | 867 | 6 | 1 |
| 8 | 754 | 8 | 1 |
| 5,0 | 656 | 11,0 | 1 |
| 2 | 532 | 2 | 1 |
| 4 | 433 | 4 | |
| 6 | 348 | 6 | 0,0000 |
| 8 | 277 | 8 | 0,0000 |
| 6,0 | 0,222 | 12,0 | 0,0000 |

*Sur une direction perpendiculaire à la fente.* — Le théorème général montre qu'alors les intensités aux différents points du plan focal sont égales aux surfaces des différentes sections que l'on peut faire dans le

solide de diffraction, parallèlement à la section méridienne. Ces sur-

Fig. 8.




faces ont été calculées dans la Table (G), et représentées dans la *fig.* 8.

TABLE G.

| $n$ | Intensité. | $n$ | Intensité. |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 4 | 1757 |
| 2 | 9710 | 6 | 1943 |
| 4 | 9420 | 8 | 2130 |
| 6 | 8787 | 4,0 | 2144 |
| 8 | 8063 | 2 | 2289 |
| 1,0 | 7258 | 4 | 2292 |
| 2 | 6353 | 6 | 2295 |
| 4 | 5383 | 8 | 2050 |
| 6 | 4502 | 5,0 | 1834 |
| 8 | 3623 | 2 | 1606 |
| 2,0 | 2925 | 4 | 1426 |
| 2 | 2348 | 5,6 | 0,1106 |
| 4 | 1899 | 8 | 867 |
| 6 | 1709 | 6,0 | 624 |
| 8 | 1565 | 2 | 461 |
| 3,0 | 1561 | 4 | 405 |
| 2 | 1626 | 6 | 314 |

TABLE G (suite).

| $n$ | Intensité. | $n$ | Intensité. |
|---|---|---|---|
| 6,8 | 0,1275 | 9,0 | 0,1234 |
| 7,0 | 257 | 2 | 182 |
| 2 | 237 | 4 | 136 |
| 4 | 260 | 6 | 112 |
| 6 | 284 | 8 | 59 |
| 8 | 322 | 10,0 | 41 |
| 8,0 | 358 | 2 | 27 |
| 2 | 364 | 4 | 12 |
| 4 | 331 | 6 | 6 |
| 6 | 293 | 8 | 4 |
| 8 | 278 | 11,0 | 3 |

Leur examen montre que, dans ce cas comme dans celui où l'ouverture était entière, l'intensité, d'abord graduellement décroissante à mesure que l'on s'éloigne de l'image géométrique, passe bientôt par une série de minima et de maxima; mais il faut remarquer que les intensités des premiers minima sont beaucoup plus grandes dans ce cas que dans l'autre, et que les différences d'intensité entre ces maxima et les minima suivants sont moindres.

Ces conclusions sont résumées dans le tableau suivant :

| | $n$ | Intensité. |
|---|---|---|
| Sur la ligne elle-même | 0,0 | 1 |
| Premier minimum | 3,0 | $\frac{1}{8,1}$ |
| Premier maximum | 4,4 | $\frac{1}{4,4}$ |
| Deuxième minimum | 7,2 | $\frac{1}{42}$ |
| Deuxième maximum | 8,2 | $\frac{1}{27}$ |
| Troisième minimum | 11,0 | 0 |

J'ai confirmé ces déductions théoriques de la manière suivante : une lanterne Drummond était munie d'une fente dont l'un des côtés était mobile au moyen d'une vis micrométrique, et se mouvait d'ailleurs un peu obliquement par rapport à l'autre. La lunette de 6 pouces de Rossi étant diaphragmée à 10 centimètres, l'image de la fente qui précède paraissait entourée, dans sa partie la plus large ($0^{mm},1$), de franges nombreuses (on en pouvait compter quatre au moins), très-fines et peu intenses, et qui disparaissaient vers le sommet de l'angle; dès que l'on recouvrait le centre de l'objectif, au moyen d'un écran de 5 centimètres de diamètre,

on n'apercevait plus qu'une seule frange, bien plus brillante et notablement plus large. En réduisant l'ouverture à 6 centimètres, puis à $3^c,2$, et couvrant toujours le centre avec un écran de diamètre moitié moindre, cette frange augmentait de largeur, et en même temps il en apparaissait une seconde extérieure plus pâle.

*Les dimensions angulaires de la source sont comparables ou supérieures à celles du solide de diffraction.*

Si la source lumineuse, au lieu d'être une simple ligne, est une fente de plus en plus large, le sens général du phénomène reste le même: mais les minima qui existaient entre les deux franges, ainsi qu'entre la première et l'image de la fente, disparaissent bien vite; de telle sorte que, lorsque les dimensions angulaires de la source sont devenues suffisamment grandes par rapport à celles du solide de diffraction caractéristique de l'ouverture employée, toute trace de maxima et de minima a disparu, et l'image de la source ne présente plus, vers ses bords, qu'un éclairement décroissant pour ainsi dire par échelons et comme si, à partir d'une certaine distance, les intensités lumineuses aux différents points du plan focal étaient représentées par les hauteurs des marches successives d'un même escalier.

On peut d'ailleurs aisément se rendre compte des intensités relatives des deux bandes lumineuses de diffraction qui entourent alors l'image de la source. J'ai pris pour cela, comme source lumineuse, une double fente analogue à celle dont j'ai déjà parlé, fortement serrée contre une lame de verre dépoli, et partagée en deux parties, au moyen d'une feuille de papier végétal qui recouvrait la moitié inférieure des deux rectangles. En éclairant cette double fente par derrière au moyen d'une lampe Drummond, on avait, au-dessus l'une de l'autre et en contact par une ligne horizontale, deux sources lumineuses, d'intensités différentes et dont l'une était environ *neuf* fois plus intense que l'autre. Or, en regardant cette double fente avec une ouverture de 6 centimètres dont le centre était couvert, j'ai constamment vu [1], sur le fond

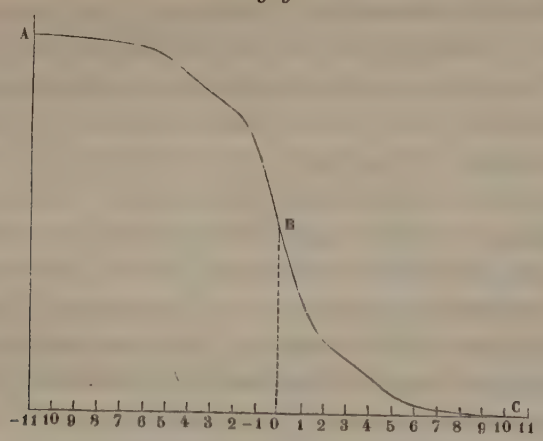
[1] Avec les petites ouvertures, l'image de la source la plus intense est toujours plus large que celle de l'autre, ce qui est conforme à la théorie.

même du champ de la lunette, deux bandes lumineuses autour de la moitié la plus éclairée et une seule autour de l'autre.

Mais, en outre, la première des deux bandes données par la source la plus intense se détachait nettement sur le fond plus obscur de l'image de l'autre, et paraissait notablement plus éclairée; sur ce fond, la seconde avait complétement disparu. L'intensité de la première de ces deux bandes est donc bien supérieure au *neuvième* de celle de la portion de l'image de la source où l'éclairement est constant, tandis que celle de la seconde bande lumineuse est, au contraire, beaucoup plus petite.

Ainsi se trouve expliquée l'observation suivante faite avec le grand équatorial de la tour de l'ouest de l'Observatoire de Paris. En réduisant son ouverture à 8 centimètres et recouvrant son centre avec un écran de diamètre moitié moindre, la planète Vénus, dont le croissant commençait alors à se former, donna une image bordée d'une bande lumineuse un peu large et sensiblement contiguë à l'image elle-même dans la partie la plus large de cette image; à partir de cette portion centrale jusqu'aux cornes du croissant, les apparences se modifiaient progressivement, si bien qu'à peu de distance des cornes cette bande s'était transformée en une véritable frange nettement séparée des bords de la planète.

Fig. 9.




Lorsque les dimensions angulaires de la source sont suffisamment grandes par rapport à celles du solide de diffraction caractéristique de

l'ouverture, l'image focale de la source se partage en deux parties : l'une où l'éclairement est constant, qui dépend de la forme et des dimensions réelles de la source ainsi que de l'ouverture employée; l'autre, qui ne dépend que de la forme de la source et du diamètre de l'ouverture, où l'éclairement décroissant peu à peu se réduit à moitié aux limites géométriques de l'image et devient nul à une distance suffisamment grande de ces limites.

La Table (H) donne les différentes valeurs de cette intensité pour des valeurs de $n$, variant de 2 dixièmes en 2 dixièmes. Les résultats en sont représentés graphiquement dans la *fig.* 9.

TABLE H.

| $n$ | Intensité. | $n$ | Intensité. | $n$ | Intensité. | $n$ | Intensité. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —11,0 | 1,0000 | —5,4 | 0,9620 | 0,0 | 0,5000 | + 5,6 | 0,0320 |
| 10,8 | 1,0000 | 2 | 9555 | + 0,2 | 4540 | 8 | 279 |
| 6 | 1,0000 | 5,0 | 9479 | 4 | 4092 | 6,0 | 249 |
| 4 | 1,0000 | 4,8 | 9371 | 6 | 3689 | 2 | 226 |
| 2 | 9999 | 6 | 9297 | 8 | 3311 | 4 | 207 |
| 10,0 | 9998 | 4 | 9193 | 1,0 | 2972 | 6 | 192 |
| 9,8 | 9996 | 2 | 9086 | 2 | 2674 | 8 | 179 |
| 6 | 9993 | 4,0 | 8980 | 4 | 2420 | 7,0 | 167 |
| 4 | 9988 | 3,8 | 8878 | 6 | 2209 | 2 | 155 |
| 2 | 9981 | 6 | 8781 | 1,8 | 2036 | 4 | 143 |
| 9,0 | 9972 | 4 | 8689 | 2,0 | 1898 | 6 | 129 |
| 8,8 | 9961 | 2 | 8605 | 2 | 1786 | 8 | 114 |
| 6 | 9948 | 3,0 | 8528 | 4 | 1693 | 8,0 | 98 |
| 4 | 9934 | 2,8 | 8454 | 6 | 1613 | 2 | 81 |
| 2 | 9919 | 6 | 8379 | 8 | 1538 | 4 | 66 |
| 8,0 | 9895 | 4 | 8298 | 3,0 | 1464 | 6 | 52 |
| 7,8 | 9878 | 2 | 8206 | 2 | 1421 | 8 | 39 |
| 6 | 9863 | 2,0 | 8094 | 4 | 1303 | 9,0 | 28 |
| 4 | 9849 | 1,8 | 7955 | 6 | 1212 | 2 | 19 |
| 2 | 9837 | 6 | 7783 | 8 | 1114 | 4 | 12 |
| 7,0 | 9825 | 4 | 7572 | 4,0 | 1012 | 6 | 7 |
| 6,8 | 9813 | 2 | 7316 | 2 | 906 | 8 | 4 |
| 6 | 9800 | 1,0 | 7020 | 4 | 799 | 10,0 | 2 |
| 4 | 9785 | 0,8 | 6680 | 6 | 696 | 2 | 1 |
| 2 | 9767 | 6 | 6303 | 8 | 600 | 4 | 0 |
| 6,0 | 9744 | 4 | 5891 | 5,0 | 514 | 6 | 0 |
| 5,8 | 9713 | — 2 | 5452 | 2 | 438 | 8 | 0 |
| — 6 | 0,9673 | 0,0 | 0,5000 | 4 | 0,0373 | +11,0 | 0,0000 |

Cette table H et la courbe des intensités (*fig.* 9) montrent que le

décroissement de la lumière n'est absolument continu, ni dans l'intérieur de l'image géométrique, ni dans la zone de lumière diffractée extérieure. Après avoir diminué d'une façon progressive, l'intensité lumineuse reste sensiblement constante dans une certaine étendue, d'autant moindre d'ailleurs que l'ouverture est plus grande. Il semble donc que, par suite de la discontinuité imposée, par ce diaphragme particulier, à la surface utilisée de l'objectif, on a introduit dans l'image elle-même une discontinuité réelle.

J'ai vérifié ce fait non-seulement sur des astres artificiels, mais aussi sur le ciel avec le grand équatorial de la tour de l'ouest de l'Observatoire de Paris; je réduisais pour cela à 8 centimètres l'ouverture de son objectif et j'en couvrais le centre avec un écran de diamètre moitié moindre. On voit alors, autour de l'image de la Lune, une bande lumineuse d'environ 15 secondes de large, assez peu intense relativement à l'éclairement central, mais dont la lumière paraît sensiblement égale à celle des parties intérieures auxquelles elle succède, et qui par suite ne se sépare nullement du reste de l'image.

Ce fait est important : en effet, il prouve qu'avec un astre, comme la Lune à son premier quartier et observée en pleine nuit, l'œil perçoit dans la zone diffractée extérieure une lumière dont l'intensité est, d'après la table H, à peu près le $\frac{1}{15}$ de l'éclairement constant et maximum. Avec une source aussi intense que le Soleil, cette limite de perception doit s'abaisser, et il n'y a rien d'impossible à admettre, comme je l'ai fait plus haut, qu'elle s'abaisse jusqu'à $\frac{1}{30}$.

On voit, en outre, que la diminution de l'intensité de la lumière dans la zone diffractée est beaucoup moins rapide dans ce cas que dans celui où l'ouverture était entièrement libre; de telle sorte que, pour voir cette intensité réduite au $\frac{1}{30}$ de sa valeur maximum, il faut donner à $n$ la valeur 5,5, au lieu de 3,8 qu'elle aurait dans l'autre cas.

En d'autres termes, la constante de diffraction instrumentale théorique, au lieu d'être

$$2'',8,$$

sera, dans le cas actuel, égale à

$$4'',0.$$

Le diamètre d'une source lumineuse, d'étendue angulaire finie, doit

donc paraître plus grand, avec ce mode de diaphragme, que lorsque l'objectif ou le miroir était entièrement nu.

La présence des bandes lumineuses dont j'ai parlé plus haut et, d'un autre côté, l'impossibilité où je me trouvais d'employer des ouvertures un peu grandes par suite des dimensions de la chambre noire m'ont empêché de vérifier directement ce changement de valeur de la correction de diffraction instrumentale. Mais l'emploi de l'écran à anneaux infiniment minces, que j'ai étudié dans le Chapitre Ier et qui exagère beaucoup tous ces phénomènes, m'a permis de mettre nettement en évidence cette conséquence de la théorie.

En recouvrant l'objectif du grand équatorial de la tour de l'Ouest de l'Observatoire de Paris d'un écran en réseau dont le diamètre extérieur était de 28 centimètres et dont les anneaux pleins et nus avaient 4 millimètres de largeur, j'ai obtenu les phénomènes suivants :

1° La *Lune*, qui était alors un peu au delà de son premier quartier, m'a paru entourée de deux bandes lumineuses, dont la première, très-intense et de 18″,4 d'épaisseur, était environ deux fois moins large que l'autre, qui d'ailleurs était peu visible. La première de ces bandes suivait exactement toutes les ondulations du bord de la Lune, se continuait même un peu au delà du bord bien terminé; plus loin, elle entourait chaque cratère un peu large, se reproduisait à leur intérieur, tandis qu'au contraire chaque pic un peu proéminent était entouré, et à assez grande distance, d'un anneau circulaire très-brillant. Ces deux bandes lumineuses étaient colorées en vert à l'intérieur et en rouge à l'extérieur.

2° De même, la planète *Vénus* paraît entourée de trois bandes lumineuses d'intensités rapidement décroissantes, dont la première est fort intense, et qui offrent des phénomènes de coloration plus nets qu'avec la Lune. La première de ces bandes suit très-nettement les contours de la planète, même dans la concavité de son croissant; la seconde les suit moins bien, et la troisième est sensiblement circulaire.

3° Autour de la planète *Jupiter* on ne voit plus que deux bandes lumineuses : cela tient à son faible éclat. Le sens général du phénomène est d'ailleurs toujours le même, mais l'apparence physique de cette planète et les satellites qui l'accompagnent conduisent à des remarques

intéressantes. Vue avec cet écran, la planète paraît formée de trois parties :

Une partie centrale nettement limitée où l'éclairement est constant, large de 39″,9 et où l'on distingue encore, moins bien cependant qu'avec l'objectif nu, les bandes qui sont pour ainsi dire l'apparence caractéristique de Jupiter;

Un anneau assez lumineux, d'une teinte un peu sombre comme celui de la Lune, coloré en vert à l'intérieur, en rouge à l'extérieur et large de 17″,9;

Un second anneau beaucoup moins intense, plus large et présentant les mêmes colorations.

Quant aux satellites, leur image se compose, comme celle des étoiles faibles, d'un disque central très-petit entouré à grande distance d'un seul anneau brillant. Mais, si à ce point de vue rien ne les distingue des étoiles, l'observation de leurs occultations derrière la planète peut servir à l'étude de ces phénomènes de diffraction. Ainsi, le 31 mai, à $10^h 45^m$ de temps moyen, le premier satellite pénétrait dans le deuxième anneau; à $11^h 45^m$, il entrait dans le premier se détachant nettement de lui par suite de son plus grand éclairement; à $12^h 22^m 30^s$, il ne se distinguait plus de la surface lumineuse derrière laquelle il se trouvait : je jugeai l'occultation arrivée. Enlevant alors l'écran et ramenant sur Jupiter la lunette avec son objectif entièrement nu, j'ai revu nettement le satellite qui ne m'a semblé disparaître de nouveau qu'à $12^h 22^m 54^s$.

Cette observation suffirait à prouver que ces deux bandes de diffraction sont réellement tout entières à l'extérieur du disque géométrique de la planète, et qu'en outre de ces bandes il existe autour de l'image du disque géométrique une zone de lumière diffractée d'une étendue très-appréciable.

## IV. — HÉLIOMÈTRE.

Nous avons démontré plus haut que l'image d'un point lumineux, donnée pour chacun des demi-objectifs dont se compose l'héliomètre, est sensiblement une ellipse dont le grand axe est dirigé perpendiculairement à la ligne de section de cet objectif. Il en résulte que le diamètre d'une source d'étendue angulaire finie doit être différent

quand on le mesure suivant la ligne de section ou suivant une perpendiculaire à cette ligne. Cette conséquence est assez importante pour exiger une vérification expérimentale directe. Je l'ai obtenue des deux manières suivantes :

1° On mesure les différents intervalles donnés par la double fente, dont j'ai parlé déjà, avec un micromètre dont la vis est horizontale, soit lorsque l'objectif est entier, soit lorsqu'on en couvre avec un écran la moitié verticale. On a ainsi (¹) :

| Ouverture en centimètre. | Diamètre extérieur. | | Diamètre intérieur. | |
|---|---|---|---|---|
| | Objectif entier. | Demi-objectif. | Objectif entier. | Demi-objectif. |
| 6,0 | 94″,06 | 98″,32 | 28″,45 | 25″,68 |
| 3,2 | 97,25 | 101,00 | 27,07 | 22,25 |

2° On mesure de la même manière les diamètres verticaux et horizontaux d'un disque circulaire percé dans une feuille de tôle, recouvert de papier végétal et fortement éclairé par derrière. On a ainsi :

| Ouverture en centimètre | Diamètre vertical. | | Diamètre horizontal. | |
|---|---|---|---|---|
| | Objectif entier. | Demi-objectif. | Objectif entier. | Demi-objectif. |
| 3,2 | 131″,76 | 131″,10 | 131″,09 | 135″,12 |

Le diamètre d'une source lumineuse est donc plus grand quand on le mesure avec un demi-objectif, dans une direction perpendiculaire à la ligne de section, que si on le mesure avec l'objectif entier. La seconde expérience nous apprend, en outre, que suivant la ligne de section les diamètres mesurés sont les mêmes. Ainsi chacune des deux images du Soleil, données par un héliomètre, est en réalité une ellipse dont le grand axe est perpendiculaire à la ligne de section ; mais son petit axe, dirigé suivant cette ligne, est égal au diamètre de l'image circulaire qu'on obtiendrait avec un objectif ordinaire de même ouverture. Les mesures de diamètre ou de distance, faites avec un héliomètre, sont donc comparables à celles faites avec une lunette ordinaire. Cependant, comme l'intensité lumineuse de chacune des images n'est au plus que le quart de ce qu'elle serait si l'objectif était

(¹) Dans ces expériences, les deux rectangles lumineux qu'offre la double fente se prolongeaient en haut et en bas par des bandes lumineuses de diamètre sensiblement égal au leur et qui subsistaient quand on augmentait l'ouverture de la lunette.

entier, l'héliomètre donnera toujours, dans le cas d'un passage, des diamètres trop grands, et des diamètres trop petits, au contraire, si les mesures sont faites dans les conditions ordinaires. C'est ce que confirme l'examen attentif des nombres qui ont été cités dans le Chapitre précédent.

L'héliomètre offre d'ailleurs un précieux avantage, que signale Bessel dans son Rapport sur l'observation du passage de Mercure, du 5 mai 1832 : « Quoique, dit-il, pendant toute la durée du passage, il soufflât une violente tempête qui souvent ébranlait l'instrument, cela n'eut aucune conséquence fâcheuse sur les observations. Les ébranlements de la lunette n'avaient point d'influence, puisqu'ils étaient partagés par les deux moitiés de l'objectif et que tout se passait, en définitive, comme si la lunette était en repos. »

# CHAPITRE III.

## CONSÉQUENCES ASTRONOMIQUES.

### I. — OBSERVATIONS MÉRIDIENNES DE LA LUNE ET DES PLANÈTES A PHASES.

Toutes les fois que l'astre dont on veut déterminer la position est tel qu'on ne puisse en observer que l'un des bords (tels sont la Lune et les planètes intérieures, ainsi que Mars et Jupiter, en certains points de leurs orbites), il faut, pour rendre comparables entre elles les observations faites avec des instruments d'ouvertures différentes, même s'ils ont des objectifs parfaits, corriger chacune d'elles de la *diffraction instrumentale* qui caractérise l'instrument considéré.

C'est ainsi, par exemple, que, toutes choses égales d'ailleurs, l'ascension droite du premier bord de la Lune sera plus petite, en un même endroit, pour un observateur armé d'un instrument de petite ouverture que pour un autre astronome dont l'instrument aurait un objectif plus grand : l'inverse aurait lieu pour le second bord de notre satellite.

Cette proposition est une conséquence directe des expériences dont

on a donné plus haut les résultats, et, à la rigueur, on peut la considérer comme déjà démontrée. Il est bon, néanmoins, d'en chercher, dans les observations elles-mêmes, une preuve pour ainsi dire plus astronomique.

Or, depuis quelques années, à l'Observatoire de Paris, on observe assidûment la Lune, pendant la première moitié de sa lunaison, à deux instruments d'ouverture différente : le grand cercle méridien ($0^m,24$ d'ouverture) et la lunette méridienne de Gambey ($0^m,15$). Voici le tableau des ascensions droites du premier bord, observées simultanément en 1875 à ces deux instruments [1], tableau dans lequel nous avons inscrit, à la colonne différence, l'excès de l'ascension droite donnée par le grand cercle méridien sur celle que donne la lunette de Gambey.

*Ascension droite du premier bord de la Lune observée le même jour à Paris, en* 1875, *à la lunette de Gambey* (G) *et au grand cercle méridien* (M).

| Dates. | | Ascension droite G. | Ascension droite M. | Différence M — G. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | h m s | h m s | s | |
| Janv..... | 19 | 6.27.21.47 | 6.27.21,58 | + 0,11 | |
| | 24 | 7.33. 9,36 | 7.33. 9,51 | 15 | |
| Fév..... | 15 | 6. 3.33.72 | 6. 3.33,87 | 15 | |
| | 18 | 9. 8.40.90 | 9. 8.41,30 | 40 | |
| | 19 | 10. 2.14,99 | 10. 2.14,95 | | s — 0,04 |
| Mars..... | 15 | 6.49. 0.83 | 6.49. 1,03 | 23 | |
| Avril..... | 14 | 9.28. 3.22 | 9.28. 3,51 | 29 | |
| | 15 | 10.18.53,61 | 10.18.53,90 | 29 | |
| | 16 | 11. 6.16,18 | 11. 6.16,09 | | — 0,09 |
| | 17 | 11.51.22.20 | 11.51.22,29 | 09 | |
| | 19 | 13.19.23.69 | 13.19.24,17 | 48 | |
| Mai..... | 12 | 10. 2.44.99 | 10. 2.45,00 | 01 | |
| | 15 | 12.21.27.63 | 12.21.27,89 | 26 | |
| | 19 | 15.24.12.78 | 15.14.12,99 | 21 | |
| Juin..... | 14 | 14.20. 2.76 | 14.20. 2,94 | 18 | |
| | 15 | 15. 7.42.66 | 15. 7.42,60 | | — 0,06 |
| | 17 | 16.51.34.22 | 16.51.34,30 | 08 | |
| | 18 | 17.47.23.25 | 17.47.23,15 | | — 0,10 |
| Juillet..... | 12 | 14.50. 2.46 | 14.50. 2,53 | 07 | |
| | 15 | 17.27.12.68 | 17.27.12,61 | | — 0,07 |
| | 17 | 19.21.46.08 | 19.21.46,21 | 13 | |
| Août..... | 10 | 16.10.57.80 | 16.10.57,88 | 08 | |
| Déc..... | 6 | 23.34.27.05 | 23.34.27,23 | 18 | |
| | 7 | 0.23.23.32 | 0.23.23,55 | 23 | |
| | | | Différence moyenne M — G... | | + $0^s,136$ |

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII, p. 577 et suiv.

Sur les vingt-quatre observations que renferme ce tableau, *cinq* seulement donnent une différence en sens inverse de celui que nous avons annoncé. Il convient d'ailleurs de remarquer que la différence moyenne correspondant à ces cinq observations n'est que de $0^s,072$, tandis que la moyenne des dix-neuf autres atteint $0^s,185$. Quoi qu'il en soit, on déduit de ce tableau que l'avance moyenne de M. Renan, observant à la lunette de Gambey, sur M. Perigaud, chargé du grand cercle méridien, est égale à

$$0^s,136, \text{ ou en arc } 2'',04;$$

malheureusement, les observations simultanées du second bord de la Lune sont trop peu nombreuses pour qu'il soit légitime d'en tirer une conclusion quelconque.

La théorie conduirait à une différence de

$$0'',50,$$

beaucoup moindre que la précédente.

Mais l'écart qui a été observé est la résultante de l'effet de la diffraction instrumentale, des différences d'aberration des deux instruments et de l'équation personnelle de l'un des observateurs par rapport à l'autre.

Or la différence des équations personnelles Périgaud-Renan est en moyenne de $0^s,5$, soit en arc $0'',75$ (1); la différence des heures observées tenant aux autres causes est donc en réalité de

$$1'',25.$$

Ces différences entre les ascensions droites du bord de la Lune, observées à des instruments différents, ont d'ailleurs été remarquées depuis longtemps : j'en citerai un exemple dû à W. Struve (2). Dans

(1) En l'absence de mesures précises sur les équations personnelles dans les passages des planètes et dans l'état d'incertitude où est encore cette question, j'admets provisoirement avec W. Struve que l'équation personnelle est la même que pour les étoiles; j'attribue ainsi aux défauts des objectifs, cause physique connue, les *différences résiduelles* qui restent après l'application de la correction de diffraction instrumentale.

(2) *Vergleichung der mit einem kleinen tragbaren Durchgangsinstrument von Ertel and der mit dem dreifüssigen Meridiankreise beobachten Geraden Aufsteigungen des Mondes and der Mondsterne.* (*Astronomische Nachrichten*, vol. X, 1833, nos 217 et suiv.)

ce Mémoire, le célèbre astronome, alors directeur de l'observatoire de Dorpat, compare les observations faites par Feodorow, avec un petit instrument de $2^c,6$ d'ouverture, à celles de Preuss avec le cercle méridien de Dorpat (11 centimètres); et, après élimination de la différence d'équation personnelle des deux observateurs, il arrive aux résultats suivants pour la différence P — F des ascensions droites de chacun des bords de la Lune :

| Premier bord. | | Deuxième bord. | |
|---|---|---|---|
| Dates. | P — F. | Dates. | P — F. |
| | s | | s |
| 1832. Mars 8 | + 0,48 | 1832. Avril 14 | — 0,28 |
| 9 | 68 | 15 | 04 |
| 10 | 39 | 16 | 21 |
| 13 | 51 | 17 | 26 |
| 14 | 38 | | |
| 15 | 60 | | |
| Avril 10 | 13 | | |
| 11 | 26 | | |
| 12 | 44 | | |
| 13 | 23 | | |
| 14 | 28 | | |

D'où, en tenant compte du poids que Struve croit devoir assigner à chacune des observations, on obtient $0^s,336$ pour valeur moyenne de la différence P — F; et, comme la sécante de la déclinaison de la Lune pendant la durée des observations est en moyenne 1,028, la différence des demi-diamètres de la Lune donnés par les deux instruments est de

$$4'',86;$$

notre théorie conduirait au nombre

$$2'',67.$$

Le nombre observé est ici encore plus grand que le nombre théorique, et même la différence est plus grande que dans le cas précédent. Cependant la lunette du petit instrument de Feodorow sortait de l'Institut optique d'Utzchneider et Fraunhofer; on ne peut donc guère lui supposer, vu ses faibles dimensions, une aberration assez forte pour produire un pareil résultat. Mais il convient d'ajouter que, comme la plupart des instruments méridiens que construisait alors Ertel, celui-ci

était à lunette brisée [1]; et, dès lors, cette différence n'a plus rien d'inexplicable, pour peu que l'on réfléchisse à la complication du système optique qui fonctionne dans de pareils instruments.

Les observations de la Lune, faites de 1862 à 1865 à la lunette méridienne de l'observatoire de Washington [2], mettent en évidence un fait du même ordre. Leur discussion a conduit M. Newcomb à cette conclusion que la correction de l'Éphéméride d'Hansen, déduite de ces observations, tout en conservant la même valeur moyenne

$$0^s,154,$$

changeait de signe avec celui des deux bords de la Lune qui avait été observé.

## II. — DÉTERMINATION DES LONGITUDES PAR LA MÉTHODE DES CULMINATIONS LUNAIRES.

Il résulte des faits que nous venons de citer que, pour obtenir avec exactitude la longitude d'un lieu par la *Méthode des culminations lunaires*, il importe de faire entrer dans le calcul le *même nombre* d'observations des *deux bords* de la Lune faites en cette station. La longitude déduite des observations du premier bord est, en effet, même en supposant *parfait* l'objectif de l'instrument, toujours plus orientale que celle déduite du second bord; et, si $c$ est la constante de diffraction instrumentale de l'instrument employé, $\delta$ la déclinaison de la Lune, $\alpha$ la variation en secondes d'arc de l'ascension droite de la Lune pour une heure sidérale, $\beta$ le facteur $\frac{54000}{\alpha} - 1$, la différence $\Delta$ des deux longitudes obtenues sera, en arc, de

$$c\,\beta\,\text{séc}\,\delta,$$

ou, comme, en moyenne, on peut supposer $\beta\,\text{séc}\,\delta = 26,4$,

$$\Delta = 26,4\,c,$$

d'où, en temps,

$$\Delta = -1,76\,c.$$

---

[1] *Astronomische Nachrichten*, n° 217.

[2] *Washington Observations for* 1865. (*Appendix II*, p. 24.)

Par exemple, les instruments méridiens qui servent dans la plupart des campagnes hydrographiques et même géodésiques ont des lunettes de 6 centimètres d'ouverture, pour lesquelles la valeur maximum de $c$ est $4'',6$ : les longitudes d'un même point obtenues avec eux, par l'un et par l'autre bord de la Lune, diffèrent donc entre elles de

$$8^s,15.$$

De même les longitudes obtenues, avec le même bord, par deux instruments dont les constantes sont $c$ et $c'$ ($c$ se rapportant au plus petit des deux), et exprimées en temps, diffèrent entre elles de la quantité

$$\Delta' = \pm 0^s,88\,(c - c'),$$

le signe — se rapportant au premier bord dans le cas où la station est orientale. Ainsi, pour le petit instrument méridien de l'Observatoire du Bureau des Longitudes à Montsouris (6 centimètres d'ouverture), et le Grand Cercle méridien de l'Observatoire de Paris ($0^m,24$), on a

$$c = 4'',630, \quad c' = 1'',158;$$

la valeur absolue de la correction précédente est donc

$$\Delta' = 2^s,71.$$

Comparons ces déductions théoriques aux résultats des observations.

1° Les nombres, que nous avons avons cités plus haut, montrent que pour les deux instruments employés par Preuss et Feodorow la correction $\Delta$ s'élève à

$$8^s,8;$$

2° Dans le voyage qu'il fit sous les ordres du capitaine de Kotzebue, Preuss avait un instrument des passages de Troughton, de 57 centimètres de foyer et de $3^c,8$ d'ouverture, avec lequel il détermina la longitude de San-Francisco, au moyen de quatre culminations du premier bord de la Lune et trois du second. Comparées avec les observations simultanées faites à Dublin, Paris, Kœnigsberg et Dorpat, celles de Preuss conduisent à une longitude *occidentale plus grande* de $7^s,4$ pour le second bord que pour le premier [1].

---

[1] *Astronomische Nachrichten*, n° 238, p. 364.

3° Pendant son séjour à l'Observatoire magnétique d'Hobart-Town, en 1843, 1844 et 1846, le lieutenant Kay (R.-N.) fit un grand nombre d'observations méridiennes de la Lune avec un instrument des passages de Troughton et Simms, de 75 centimètres de foyer et de 7 centimètres d'ouverture. En les comparant aux observations correspondantes faites aux grands instruments de Greenwich, Édimbourg et Cambridge, il trouva, pour longitude orientale d'Hobart-Town [1] :

| | Longitude déduite des observations du | | | |
|---|---|---|---|---|
| Observatoire. | 1er bord. | Nombre des observations. | 2e bord. | Nombre des observations. |
| | h m s | | h m s | |
| Greenwich.... | 9.49.26,03 | 9 | 9.49.15,68 | 3 |
| Édimbourg.... | 24,12 | 14 | 21.72 | 4 |
| Cambridge.... | 31,94 | 5 | 20,24 | 9 |

Je me borne à ces trois exemples : ils sont loin d'être les seuls que je pourrais citer, car on en trouve bien d'autres dans les Recueils astronomiques. Je signalerai surtout un Mémoire de C.-A.-F. Peters, publié en 1825, et dans lequel il donne les différences de longitude de la plupart des observatoires d'Europe, obtenues au moyen de l'observation de la Lune et des étoiles voisines de son parallèle [2].

*Conclusion.* — Dans la détermination des longitudes par la méthode des culminations lunaires, il importe au plus haut point de connaître le diamètre apparent de la Lune, donné par l'instrument dont on se sert. Pour cela, il faut donc profiter de toutes les occasions, d'ailleurs rares, où l'on peut observer à la fois les deux bords de la Lune: c'est ce que firent Preuss et Feodorow, le 14 avril 1832 [3]. Les durées du passage de la Lune au méridien furent

$$2^m 9^s,02 \text{ pour Feodorow,}$$

et

$$2^m 8^s,46 \text{ pour Preuss,}$$

nombres qui diffèrent entre eux de $0^s,56$. On en conclut que le diamètre de la Lune était plus grand de $8'',64$ dans l'instrument de Feo-

---

(1) *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. IX, p. 41.

(2) *Langendifferenzen meherer Sternwarten aus den Beobachtungen der Mondsterne berechnet.* (*Astronomische Nachrichten*, vol. V, n° 101, p. 65 et suiv.)

(3) *Astronomische Nachrichten*, n° 237, p. 343.

dorow que dans celui de Preuss, valeur qui diffère peu de celle qu'a fourni l'ensemble des observations. C'est aussi ce que faisait Bessel à l'Observatoire de Kœnigsberg (1).

Si, d'un autre côté, dans un observatoire fixe, avec un instrument de même ouverture que ceux qui servent en campagne, et aussi exempt d'aberration que possible, on détermine assidûment la correction de l'Éphéméride de la Lune, ainsi que son diamètre apparent, on aura tous les éléments nécessaires au calcul et à l'élimination des différences dont je viens de démontrer l'existence.

## III. — OCCULTATIONS.

L'occultation d'une étoile par la Lune peut donner lieu, suivant la phase dans laquelle se trouve alors notre satellite, à quatre observations différentes :

1° Disparition de l'étoile derrière le bord obscur de la Lune;

2° Réapparition de l'étoile au delà du bord obscur de la Lune;

3° Disparition de l'étoile derrière le bord éclairé de la Lune;

4° Réapparition de l'étoile au delà du bord éclairé de la Lune.

De ces quatre espèces d'observations, la première est évidemment la plus précise; la dernière, au contraire, sujette aux causes d'erreur les plus considérables.

Quoi qu'il en soit, l'observation de l'un quelconque de ces quatre phénomènes détermine le point du limbe lunaire qui, à un instant donné, celui de l'occultation, a la même déclinaison et la même ascension droite que l'étoile occultée. On peut en déduire (2) les coordonnées d'une *étoile fictive* qui serait, au même instant et pour un observateur placé au centre de la Terre, en contact avec le même point du bord de la Lune; et, par suite, la *distance angulaire* de cette étoile fictive au centre de la Lune, c'est-à-dire le *demi-diamètre lunaire déduit de chaque occultation observée*.

Si la théorie qui vient d'être exposée est exacte, il est certain que les

(1) *Kœnigsberger Beobachtungen.*

(2) *Introduction to Greenwich Astronomical Observations; calculations of occultations of Stars.*

*diamètres d'occultation* résultant des observations faites sur le bord obscur de la Lune seront toujours plus petits que ceux qui s'obtiendront avec les observations faites sur le bord éclairé, et plus petits de la valeur de la constante de diffraction instrumentale relative à l'instrument considéré. La discussion des nombres donnés par de nombreuses occultations doit donc fournir une nouvelle vérification des principes dont on a essayé de donner la démonstration.

Malheureusement les observations de réapparition d'étoiles au delà du bord éclairé de la Lune sont trop peu précises pour qu'on puisse les faire entrer en ligne de compte, et l'on doit se borner aux trois premiers phénomènes cités en commençant.

Les *Annales de l'Observatoire de Greenwich*, établissement dont les forces ont été, depuis sa fondation, dirigées surtout vers l'observation de notre satellite, renferment à cet égard des documents précieux. Je citerai en particulier un Mémoire de M. Breen sur les diamètres lunaires déduits des occultations observées à Cambridge de 1830 à 1835 et à Greenwich de 1836 à 1860 (¹), Mémoire dont sont extraits les éléments de notre comparaison.

Je choisirai, dans ce but, les observations faites à Greenwich avec un instrument déterminé, l'équatorial Est [de 6,7 pouces anglais ($0^m,17$) d'ouverture], de 1838 à 1852, période pendant laquelle le diamètre de la Lune donné par le *Nautical Almanac* a différé d'une quantité constante de la valeur adoptée par M. Breen dans son calcul, et qui résulte des observations méridiennes et altazimutales faites à Greenwich pendant la même période.

On a ainsi soixante-huit observations de disparition d'étoiles derrière le bord obscur, conduisant en moyenne au nombre

$$-1'',98$$

comme correction au diamètre adopté, et vingt-cinq observations de réapparition au delà du même bord, donnant en moyenne la correction

$$-3'',11;$$

(¹) *On the value of the Moon's semidiameter as obtained by the investigations of Hugh Breen, from occultations observed at Cambridge and Greenwich.* (*Astronomical and Meteorological Observations made at the royal Observatory Greenwich in the year* 1864 ; *Appendix I.*)

à cause de la différence des deux observations, il est convenable de ne pas prendre ces deux nombres séparément, mais bien plutôt de ne considérer que leur moyenne, laquelle est

$$-2'',54.$$

D'un autre côté, la même période fournit quinze observations de disparition derrière le bord lumineux de la Lune, dont l'ensemble donne pour correction nouvelle

$$-0'',80.$$

La différence des deux est

$$1'',74,$$

tandis que la constante théorique de diffraction instrumentale de l'équatorial Est de Greenwich est de

$$1'',55.$$

L'accord de ces deux nombres est aussi complet que le comportent les incertitudes de l'observation, tout aussi bien que celles qui existent sur la valeur même de la constante théorique adoptée.

## IV. — DÉTERMINATION DE LA PARALLAXE SOLAIRE AU MOYEN DE L'INÉGALITÉ PARALLACTIQUE DE LA LUNE.

La Lune ne sert point seulement à nous montrer, par la place qu'elle occupe par rapport aux étoiles, quelle position nous occupons nous-mêmes sur la surface de la Terre; l'observation régulière de notre satellite peut aussi nous faire connaître la distance qui nous sépare de l'astre central de notre système planétaire.

L'une des inégalités du mouvement de la Lune, l'*inégalité* dite *parallactique* dont la forme est I sin D, D étant la distance angulaire moyenne de la Lune et du Soleil, dépend en effet essentiellement de la distance de la Terre au Soleil et peut servir à la déterminer. Ainsi

I étant le coefficient de l'équation parallactique,
$\pi$ la constante de la parallaxe solaire,
$\mu$ la masse de la Lune ($\mu = \frac{1}{81,5}$),
P la constante de la parallaxe lunaire ($P = 3422'',7$),
$m$ le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune,
F un facteur constant, égal à 0,24123,

on a, d'après Delaunay [1]

$$I = F \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\sin \pi}{\sin P} \frac{1}{1 - \frac{m^2}{6}},$$

c'est-à-dire que la parallaxe solaire est à très-peu près le $\frac{1}{14}$ du coefficient de l'équation parallactique.

Pour obtenir, par ce moyen, la parallaxe solaire avec la précision de $\frac{1}{100}$ de seconde qu'on demande aujourd'hui aux observations du passage de Vénus, il faudrait donc connaître la valeur de l'inégalité parallactique avec une erreur moindre que

$$0'',14;$$

ou, en d'autres termes, une incertitude de $0'',1$ sur la valeur de l'inégalité parallactique entraîne une erreur correspondante de $0'',007$ sur la parallaxe solaire. Une pareille précision ne peut être atteinte que si l'on tient compte de l'effet de la diffraction instrumentale : c'est ce que je vais montrer, en prenant comme base les nombres donnés par M. Newcomb, dans le Mémoire que j'ai déjà cité [2], Mémoire où il discute les observations de la Lune effectuées de 1862 à 1865 avec la lunette méridienne ($0^m,135$ d'ouverture) de l'Observatoire de Washington.

Les observations faites, pendant ces quatre ans, aux époques du maxima (en valeur absolue) de l'inégalité parallactique lui donnent immédiatement pour valeur de cette quantité

$$124'',36,$$

au lieu du nombre

$$126'',46,$$

qu'Hansen avait déduit des observations de Greenwich et de Dorpat et adopté pour ses Tables.

D'un autre côté, sept fois, pendant cette période de quatre ans, la Lune fut assez près de l'opposition, au moment de son passage au

---

(1) *Théorie du mouvement de la Lune*, vol. II, p. 847.

(2) *Investigations on the distance of the Sun and the elements wich depend upon it.* (*Astronomical and meteorological observations made at the United-States Naval Observatory, during the year* 1865; *Appendix II.*)

méridien, pour qu'on pût en observer les deux bords et obtenir ainsi son diamètre instrumental : il fut trouvé égal à celui des Tables d'Hansen; de telle sorte que, au premier abord, il résulterait des observations de Washington une correction de

$$-2'',10$$

à apporter à l'inégalité parallactique donnée par Hansen. Mais, et c'est ici qu'intervient la diffraction instrumentale, la discussion de l'ensemble des observations faites pendant la période indiquée plus haut montre que le demi-diamètre instrumental de la Lune est plus petit le jour que la nuit, et moindre de la quantité

$$0'',92.$$

Si l'on admet, ce qui ne peut guère être éloigné de la vérité, que les $\frac{2}{3}$ des observations correspondantes aux maxima de l'inégalité parallactique (c'est-à-dire vers les quadratures) ont été faites de jour ou tout au moins quelques-unes de celles-là pendant le crépuscule, comme, d'un autre côté, celles qui ont servi à déterminer le diamètre ont été toutes faites près de minuit, l'inégalité parallactique que nous avons obtenue directement est trop petite de $0'',612$; l'inégalité parallactique serait donc

$$124'',97.$$

Mais, il faut le remarquer, ce procédé de correction est en réalité un peu hypothétique; les corrections d'ascension droite, dont on a déduit le nombre $0'',917$, dépendant dans une certaine mesure de l'incertitude qui existe sur la valeur du coefficient de la *variation*, pour avoir une valeur certaine de l'inégalité parallactique, il faudrait suivre une méthode un peu différente, qui exige d'ailleurs l'emploi d'un altazimut, seul instrument véritablement approprié à la détermination qui nous occupe.

Cette méthode, dans laquelle il faut également mesurer le diamètre de la Lune toutes les fois que cela est possible, consiste à déterminer une première valeur approchée de l'inégalité parallactique au moyen de la discussion d'un même nombre d'observations des deux bords de la Lune, faites au moment des quadratures et toutes pendant le jour; puis, au moyen de deux groupes d'observations, en comprenant cha-

cun un nombre égal des deux bords de notre satellite, et faites au moment des syzygies, on calcule la correction qu'il faut apporter à cette valeur approchée pour tenir compte de l'effet de la diffraction instrumentale. Le résultat est évidemment tout à fait indépendant de la valeur du coefficient de la variation, cette inégalité étant toujours nulle aux syzygies aussi bien qu'aux quadratures.

Quoi qu'il en soit, en discutant les observations à un autre point de vue, M. Newcomb avait été conduit à admettre pour valeur de l'inégalité parallactique déduite des observations de Washington le nombre

$$125'',46.$$

La différence $0'',49$ des deux résultats précédents entraîne une différence de $0'',04$ sur la parallaxe solaire qu'on en peut déduire; on voit ainsi toute l'importance qu'a, même dans cette question, l'application de la loi que nous avons énoncée.

## V. — PASSAGES DE VÉNUS ET DE MERCURE.

Le diamètre du Soleil et celui de Vénus étant différents l'un et l'autre pour deux observateurs armés de lunettes différentes tandis que la vitesse relative de Vénus par rapport au Soleil est au contraire invariable, les deux astres ne doivent point paraître en contact au même instant, en un même lieu, pour ces deux observateurs. Le premier contact interne paraît devoir être noté d'autant plus tôt que l'ouverture de l'instrument est plus petite, et le second contact interne être, au contraire, noté d'autant plus tard dans les mêmes conditions.

Les instruments employés dans les observations des passages de Vénus de 1761 et 1769 étaient si imparfaits à cause de l'époque même, que l'on ne peut guère espérer trouver dans les observations une vérification de cette loi. Cependant il convient de remarquer qu'en 1761, tout aussi bien qu'en 1769, le diamètre déduit de l'observation directe des contacts est sensiblement le même que celui qu'on déduit de l'ensemble des mesures micrométriques; cette coïncidence porte à croire que l'heure d'un contact dépend de la valeur du diamètre de Vénus dans l'instrument employé. Mais l'observation faite par M. Bessel, avec l'héliomètre de Kœnigsberg, lors du passage de Mercure des 4 et 5 mai 1832, conduit à des résultats plus nets.

Bessel se proposait trois buts :

1° Déterminer les heures de contact des bords des deux astres;

2° Étudier les apparences physiques du phénomène;

3° En déduire un jugement sur l'irradiation du Soleil et, par suite, déterminer la grandeur et la forme de la planète Mercure.

Pour résoudre ces différentes questions, il convenait de déterminer par des mesures directes non-seulement le diamètre de Mercure, mais aussi celui du Soleil; l'héliomètre s'y prêtait merveilleusement, et l'on a obtenu ainsi :

| | |
|---|---|
| Diamètre du Soleil ramené au centre de la Terre..... | 15′50″,879 |
| Diamètre de Mercure à l'unité de distance..... | 6″,6974 |

Remarquons que les *Tabulæ regiomontanæ*, fondées sur des observations méridiennes faites avec des instruments d'ouverture moins considérable que celle de l'héliomètre de Bessel, attribuaient au Soleil un diamètre

$$15'51'',96,$$

plus grand de 1″,081 que celui mesuré directement par Bessel.

Quant aux contacts, Bessel les a observés « de la façon la plus simple et la plus naturelle ».

Mais Bessel a été plus loin; il a pris vers le milieu du passage une série de mesures des distances de la planète à des points diamétralement opposés du bord du Soleil, obtenant ainsi, sans avoir besoin de connaître le diamètre du Soleil, la plus courte distance de l'orbite apparente de la planète au centre du Soleil. D'un autre côté, les heures des deux contacts intérieurs lui donnaient la longueur de la corde décrite par le centre de la planète sur un cercle dont le diamètre serait la différence entre les diamètres déjà trouvés des deux astres; et cette longueur, combinée avec la distance précédente, déterminait la différence des deux diamètres et par suite le diamètre du Soleil, puisque celui de la planète était connu.

Bessel obtint ainsi, pour le diamètre du Soleil, les trois valeurs suivantes :

| | |
|---|---|
| D'après les contacts intérieurs..... | 15′50″,893 |
| D'après les mesures directes..... | 15′50″,898 |
| D'après les distances mesurées..... | 15′50″,823 |

Ces trois valeurs s'accordent entre elles, plus peut-être qu'on aurait été en droit de l'espérer.

On doit conclure de là que l'instant du contact obtenu avec un instrument donné dépend des diamètres apparents du Soleil et de Mercure dans cet instrument; et, comme ceux-ci varient avec son ouverture, que l'instant du contact varie lui-même avec elle.

C'est également la conclusion que l'on paraît être en droit de déduire des nombres obtenus dans les différentes stations françaises lors du dernier passage de Vénus. Mais, les résultats de ces observations et ceux trouvés par les principales missions de l'étranger n'ayant pas encore été livrés à la publicité, il convient d'en différer la discussion.

Cette question fera l'objet d'un Mémoire spécial, dans lequel seront décrites les méthodes que M. Angot et moi nous employons pour étudier le phénomène du passage tant au point de vue de l'observation directe qu'au point de vue photographique, et où nous indiquerons les conséquences auxquelles elles nous conduisent.

Mais je ne veux point attendre jusque-là pour remercier bien vivement MM. H. Deville et Mascart. M. Deville a gracieusement mis à notre disposition les ressources de son laboratoire. Depuis notre retour de Nouméa, M. Mascart nous a constamment guidés, M. Angot et moi, dans les recherches que nous avions entreprises; son esprit ferme et droit a aplani toutes les difficultés de la route que nous voulions parcourir, et c'est à lui que revient la meilleure part de ce travail. Je suis heureux de pouvoir leur exprimer publiquement toute notre reconnaissance.

# EXPOSITION

DE LA

# MÉTHODE DE M. GYLDEN

POUR LE

## DÉVELOPPEMENT DES PERTURBATIONS DES COMÈTES,

PAR M. B. BAILLAUD,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR AU LYCÉE CHARLEMAGNE.

## INTRODUCTION.

1. Dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris (*Mémoire sur le calcul des perturbations qu'éprouvent les comètes, Supplément aux Comptes rendus*, t. I), Hansen a proposé en 1847, pour le développement analytique des perturbations des comètes, une méthode nouvelle, consistant essentiellement à partager l'orbite de la comète en plusieurs parties, et à former des développements particuliers pour chacune d'elles. Malgré l'accroissement de convergence qui en résulte, la méthode de Hansen n'a pas été appliquée, la multiplicité des développements diminuant singulièrement les avantages que la méthode semblait avoir, et l'on continua à calculer les perturbations d'année en année par la méthode des quadratures. En juin 1869, M. Hugo Gylden publia, dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, un Mémoire sur le même sujet. M. Gylden reprend l'idée de Hansen, e réussit par un artifice ingénieux, en introduisant les fonctions elliptiques, à augmenter la convergence à la fois par rapport aux deux va-

riables dont dépendent les positions de la comète et de la planète perturbatrice. Ce premier Mémoire de M. Gylden fut suivi de plusieurs autres insérés dans les Recueils des Académies de Saint-Pétersbourg, de Copenhague, de Stockholm, et relatifs à la théorie des fonctions elliptiques. Ces derniers Mémoires renferment un grand nombre de méthodes et de résultats remarquables, et intéressent autant les géomètres que les astronomes.

2. Nous nous sommes proposé, dans ce travail, d'exposer aussi simplement et aussi brièvement qu'il nous a été possible de le faire la nouvelle méthode de calcul des perturbations. Les idées de Hansen étant peu répandues, nous en avons fait une exposition générale. Nous avons terminé ce Mémoire par un exemple numérique destiné à montrer dans quelles conditions la méthode de M. Gylden peut s'appliquer avantageusement. Pour y parvenir plus clairement nous avons choisi l'exemple qui avait été traité par Hansen dans le Mémoire cité plus haut, c'est-à-dire le calcul des perturbations que la Terre exerce sur la comète d'Encke, et nous avons divisé l'orbite de la comète comme l'avait fait Hansen lui-même. On verra que, dans ces conditions, la méthode de M. Gylden ne s'applique pas : l'orbite doit être divisée en un plus grand nombre de parties, de telle façon que, dans chacune d'elles, la distance des deux astres varie surtout en raison du déplacement de la planète. Néanmoins il n'est pas nécessaire de multiplier beaucoup le nombre des points de division pour que la méthode puisse être appliquée; cinq ou six pourront suffire, et, comme on augmente beaucoup la convergence des développements *par rapport aux deux variables*, l'avantage de la méthode ne peut être contesté.

3. Soient

$x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires d'une comète par rapport à des axes passant par le centre du Soleil;
$x'$, $y'$, $z'$ celles d'une planète perturbatrice;
$m'$ la masse de cette planète;
$\Delta$ la distance de la planète à la comète;
$r'$ celle de la planète au Soleil.

Les équations du mouvement de la comète sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{x}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{y}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{z}{r^3} = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

$\mu$ désignant un nombre constant pour tout le système solaire, et $\Omega$ la quantité

$$m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right);$$

on a supposé nulle la masse de la comète.

A cause de la petitesse de la quantité $\Omega$, on a coutume d'intégrer d'abord les équations précédentes en y supposant $\Omega$ nul; puis on regarde les intégrales du mouvement elliptique ainsi obtenu comme représentant encore le mouvement vrai, ce qui est toujours possible si l'on regarde les constantes introduites par l'intégration comme des fonctions du temps. On peut même faire en sorte que non-seulement $x$, $y$, $z$, mais aussi leurs dérivées premières, conservent les mêmes formes dans le mouvement vrai que dans le mouvement elliptique. On obtient ainsi six équations entre les dérivées par rapport au temps des éléments du mouvement elliptique, ces éléments eux-mêmes et le temps.

4. L'intégration des équations du mouvement elliptique conduit à introduire, au lieu des coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$, les coordonnées polaires dans le plan de l'orbite, et à remplacer la variable angulaire dans ce plan par l'anomalie moyenne. Pour les besoins de l'Astronomie, on est ainsi amené à conclure des variations des éléments du mouvement elliptique celles du rayon vecteur, de l'anomalie moyenne et de la latitude ou plutôt de son sinus; mais il est clair qu'il n'y a là que des transformations faciles, et que la véritable difficulté de la méthode réside dans la formation des dérivées de $\Omega$ par rapport aux éléments du mouvement elliptique.

Le premier terme $\frac{m'}{\Delta}$ de la fonction perturbatrice étant beaucoup plus grand que le second quand la distance des deux astres est très-

petite, et ses dérivées partielles dépendant de $\frac{1}{\Delta^3}$, c'est la formation de cette quantité qui doit présenter le plus de difficultés, et c'est à son étude que nous nous bornerons dans ce travail.

$\Delta$ dépendant des anomalies moyennes de la comète et de la planète, ou de variables équivalentes, se développera en une série périodique de sinus et de cosinus de multiples de ces variables. Comme $\Delta^2$ est de la forme

$$r^2+r'^2-\mathrm{A}rr'\cos f\cos f'-\mathrm{B}rr'\sin f\sin f'-\mathrm{C}rr'\cos f\sin f'-\mathrm{D}rr'\sin f\cos f',$$

où $r$ et $r'$ désignent les rayons vecteurs de la comète et de la planète, $f$ et $f'$ leurs anomalies vraies, on doit d'abord former les quantités

$$\begin{array}{lll} r^2, & r\cos f, & r\sin f, \\ r'^2, & r'\cos f', & r'\sin f'. \end{array}$$

Il est évident d'ailleurs que la connaissance de ces six quantités équivaut à celle des positions de la comète et de la planète dans leurs orbites, et par conséquent doit suffire pour former toutes les quantités dont dépend le calcul des perturbations.

## I.

5. Soient

$a$ le demi-grand axe;
$e$ l'excentricité de l'orbite de la comète;
$u$ son anomalie excentrique;
$t$ le temps.

On a les relations bien connues

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} r &= a(1-e\cos u), \\ r\cos f &= a(\cos u-e), \\ r\sin f &= a\sqrt{1-e^2}\sin u, \\ n\,dt &= \frac{r}{a}\,du, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}, \\ n\,dt &= \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,df. \end{aligned}\right.$$

6. Soient $r_1$ et $r_2$ les rayons vecteurs de deux points de l'orbite situés de part et d'autre du grand axe. Il est aisé de représenter, à l'exclusion de tous les autres, les points de l'ellipse compris entre eux dans la portion qui contient le périhélie. Il suffit de former une fonction périodique d'une variable auxiliaire qui ait pour maxima $r_1$ et $r_2$ et pour minimum $a(1-e)$. Posons

$$r = A + B\sin x + C\sin^2 x.$$

Cette fonction aura un minimum $a(1-e)$ si l'on peut l'écrire

$$(3) \qquad r = a(1-e) + (M\sin x + N)^2,$$

la valeur absolue de M n'étant pas inférieure à celle de N.

$r$ sera maximum quand $\cos x$ sera nul, c'est-à-dire quand $x$ aura l'une des valeurs $-90°$ et $+90°$. Ces valeurs maxima seront $r_2$ et $r_1$ si

$$M - N = \sqrt{r_2 - a(1-e)},$$
$$M + N = \sqrt{r_1 - a(1-e)}.$$

Les deux radicaux ayant le même signe, puisque $M^2$ est plus grand que $N^2$, on peut les prendre positifs.

La comparaison de la relation (3) avec la première des relations (1), mise sous la forme

$$r = a(1-e) + 2ae\sin^2\frac{u}{2},$$

donne

$$(4) \qquad \sin^2\frac{u}{2} = \left(\frac{M}{\sqrt{2ae}}\sin x + \frac{N}{\sqrt{2ae}}\right)^2.$$

Le calcul de M et N sera facilité si l'on pose

$$\frac{M}{\sqrt{2ae}} = \varepsilon\cos\varphi, \quad \frac{N}{\sqrt{2ae}} = \varepsilon\sin\varphi,$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}(45° - \varphi) = \sqrt{\frac{r_2 - a(1-e)}{r_1 - a(1-e)}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - 2a(1-e)}{4ae}}.$$

Si l'on prend $\varepsilon$ positivement, $\cos\varphi$ sera positif, et, par suite, $\varphi$ sera compris entre $-90°$ et $+90°$; comme $\operatorname{tang}(45° - \varphi)$ est positive, $\varphi$ est compris entre $-45°$ et $+45°$.

Les relations précédentes prennent des formes utiles quand on y introduit les anomalies excentriques $u_1$, $u_2$, qui correspondent aux points $r_1$, $r_2$. On a

$$\sqrt{r_2 - a(1-e)} = \sqrt{2ae}\sin\frac{u_2}{2},$$

$$\sqrt{r_1 - a(1-e)} = \sqrt{2ae}\sin\frac{u_1}{2},$$

puisque $\frac{u_1}{2}$ et $\frac{u_2}{2}$ sont moindres que 180 degrés.

On en conclut

$$\varepsilon\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\sin\frac{u_1}{2} + \sin\frac{u_2}{2}\right),$$

$$\varepsilon\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\sin\frac{u_1}{2} - \sin\frac{u_2}{2}\right)$$

et, par suite,

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\sin^2\frac{u_1}{2} - \sin^2\frac{u_2}{2}\right) = \frac{r_1 - r_2}{4ae\varepsilon^2},$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \varphi) = \frac{\sin\frac{u_2}{2}}{\sin\frac{u_1}{2}},$$

$$(5) \qquad \varepsilon^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sin^2\frac{u_1}{2} + \sin^2\frac{u_2}{2}\right).$$

Il est aisé d'exprimer $r$, $r\cos f$, $r\sin f$, $n\,dt$ en fonction de $x$ en partant de la relation (4). Nous remarquerons d'abord qu'en extrayant les racines carrées des deux membres de cette relation on doit écrire

$$(6) \qquad \sin\frac{u}{2} = \pm\varepsilon(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi),$$

en adoptant le signe supérieur quand $u$ est moindre que $u_1$ et le signe inférieur quand $u$ est plus grand que $u_2$, car la quantité entre parenthèses s'annule au périhélie, et en s'annulant change de signe. Elle est d'ailleurs positive pour $x = 90^\circ$, car

$$\varepsilon(\cos\varphi + \sin\varphi) = \sin\frac{u_1}{2}.$$

D'après cela, les formules (1) donnent immédiatement

$$r = a(1 - e + e\varepsilon^2 \sin^2\varphi) + 2ae\varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin x - ae\varepsilon^2 \cos^2\varphi \cos 2x,$$

$$r \cos f = a(1 - e - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi) - 2a\varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin x + a\varepsilon^2 \cos^2\varphi \cos 2x,$$

$$r \sin f = 2a\varepsilon\sqrt{1 - e^2}(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi)\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi - \varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin x - \varepsilon^2 \cos^2\varphi \sin^2 x},$$

$$n\,dt = \frac{r}{a} \frac{2\varepsilon \cos\varphi \cos x\, dx}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi - \varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin x - \varepsilon^2 \cos^2\varphi \sin^2 x}}.$$

En tenant compte de l'observation relative à la formule (6), on reconnaît aisément que le radical qui entre dans les deux dernières formules est positif.

7. L'expression de $r$ en fonction de l'anomalie excentrique étant analogue à celle de $\frac{1}{r}$ en fonction de l'anomalie vraie, on entrevoit aisément la possibilité de représenter l'arc d'ellipse qui joint les points $r_1$ et $r_2$ en passant par l'aphélie. Il faudra poser

$$\frac{1}{r} = A' + B' \sin x + C' \sin^2 x;$$

$r$ aura pour maximum $a(1 + e)$, si cette valeur de $\frac{1}{r}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1+e)} + (M' \sin x + N')^2,$$

en supposant que la valeur absolue de $M'$ ne soit pas moindre que celle de $N'$, et pour minima $r_1$ et $r_2$, si

$$M' - N' = \sqrt{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a(1+e)}},$$

$$M' + N' = \sqrt{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a(1+e)}},$$

les radicaux étant encore pris positivement.

En identifiant la valeur précédente de $\frac{1}{r}$ avec celle que donne la première des formules (2), on trouve

$$(4\,bis) \qquad \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{a(1 - e^2)}{2e}(M' \sin x + N')^2,$$

On facilitera ici le calcul de M′ et de N′ en posant

$$M'\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{2e}}=\varepsilon'\cos\varphi',\quad N'\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{2e}}=-\varepsilon'\sin\varphi',$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi')=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}\frac{a(1+e)-r_1}{a(1+e)-r_2}},$$

$$\varepsilon'=\sqrt{(1-e)\frac{a(r_1+r_2)(1+e)-2r_1r_2}{4er_1r_2}},$$

les radicaux étant pris positivement, de sorte que $\varphi'$ est compris entre $-45$ et $+45^\circ$.

Par l'introduction des anomalies vraies $f_1$ et $f_2$ des points $r_1$ et $r_2$, les formules précédentes se simplifient. On a

$$\sqrt{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{a(1+e)}}=-\sqrt{\frac{2e}{a(1-e^2)}}\cos\frac{f_2}{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{a(1+e)}}=\sqrt{\frac{2e}{a(1-e^2)}}\cos\frac{f_1}{2},$$

les signes des seconds membres étant déterminés par la considération de ceux de $\cos\frac{f_1}{2}$ et de $\cos\frac{f_2}{2}$. Par suite,

$$\varepsilon'\cos\varphi'=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{f_1}{2}-\cos\frac{f_2}{2}\right),$$

$$\varepsilon'\sin\varphi'=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{f_1}{2}+\cos\frac{f_2}{2}\right)$$

et encore

$$\sin 2\varphi'=\frac{1}{2\varepsilon'^2}\left(\cos^2\frac{f_2}{2}-\cos^2\frac{f_1}{2}\right)=\frac{r_1-r_2}{4e\varepsilon'^2r_1r_2}a(1-e^2),$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi')=-\frac{\cos\frac{f_1}{2}}{\cos\frac{f_2}{2}},$$

(5 *bis*) $$\varepsilon'^2=\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{f_1}{2}+\cos^2\frac{f_2}{2}\right).$$

Pour déterminer $\frac{1}{r}$, $\cos f$, $\sin f$ et $n\,dt$ en fonction de $x$, on remarque

que la relation (4 *bis*) donne

$$\cos\frac{f}{2} = \pm\varepsilon'(\cos\varphi'\sin x - \sin\varphi');$$

mais on doit choisir le signe supérieur, car si la parenthèse change de signe quand on passe à l'aphélie, il en est de même du premier membre, et, pour $x = 90^\circ$, la parenthèse est positive.

On a donc

$$\cos\frac{f}{2} = \varepsilon'(\cos\varphi'\sin x - \sin\varphi'),$$

et l'on en conclut

$$a(1-e^2)\frac{1}{r} = 1 - e + e\varepsilon'^2 + e\varepsilon'^2\sin^2\varphi' - 2e\varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - e\varepsilon'^2\cos^2\varphi'\cos 2x,$$

$$\cos f = \varepsilon'^2 + \varepsilon'^2\sin^2\varphi' - 1 - 2\varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - \varepsilon'^2\cos^2\varphi'\cos 2x,$$

$$\sin f = 2\varepsilon'(\cos\varphi'\sin x - \sin\varphi')\sqrt{1 - \varepsilon'^2\sin^2\varphi' + \varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - \varepsilon'^2\cos^2\varphi'\sin^2 x},$$

$$n\,dt = -\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2\varepsilon'\cos\varphi'\cos x\,dx}{\sqrt{1 - \varepsilon'^2\sin^2\varphi' + \varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - \varepsilon'^2\cos^2\varphi'\sin^2 x}},$$

le radical qui entre dans les deux dernières formules étant positif.

8. Les formules précédentes se simplifient beaucoup quand l'un des points de division est situé au périhélie ou à l'aphélie, et les formules ainsi obtenues permettent de représenter l'ellipse partagée en quatre portions. Par une transformation facile, on peut faire en sorte que ces quatre parties soient obtenues en faisant varier la variable de zéro à 360 degrés. Rangeons ces parties dans l'ordre suivant lequel on les rencontre en partant du périhélie et tournant dans le sens du mouvement de la comète. Les formules relatives à la première et à la quatrième se déduiront de celles du n° 6, dans lesquelles $x$ varie de $-90^\circ$ à $+90^\circ$, ou si l'on veut de $+270^\circ$ à $+90^\circ$, puisqu'il n'entre pas dans ces formules de sous-multiple de $x$; pour la deuxième et la troisième partie, on appliquera les formules du n° 7, où $x$ varie de $+90^\circ$ à $+270^\circ$. On fera les substitutions suivantes :

Première et deuxième région : $x = 2y - 90^\circ$,
Troisième et quatrième région : $x = 2y + 90^\circ$,

et l'on obtiendra successivement les quatre régions en faisant varier $y$ de zéro à 90 degrés, de 90 à 180 degrés, de 180 à 270 degrés, de 270 à 360 degrés.

Nous désignerons par $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ les valeurs de $\varepsilon$ ou de $\varepsilon'$ dans ces quatre régions, par $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, $\Phi_4$ celles de $\varphi$ et de $\varphi'$. Les formules sont alors les suivantes :

Première région :

$$\Phi_1 = 45^\circ, \quad E_1 = \sqrt{\frac{r_1 - a(1-e)}{2ae}} = \sin\frac{u_1}{2}, \quad \sin\frac{u}{2} = E_1 \sin^2 y,$$

$$r = a(1 - e + \tfrac{3}{4}eE_1^2) - aeE_1^2\cos 2y + \tfrac{1}{4}aeE_1^2\cos 4y,$$

$$r\cos f = a(1 - e - \tfrac{3}{4}E_1^2) + aE_1^2\cos 2y - \tfrac{1}{4}aE_1^2\cos 4y,$$

$$r\sin f = aE_1\sqrt{1-e^2}\,(1-\cos 2y)\sqrt{1 - E_1^2\sin^4 y},$$

$$n\,dt = \frac{r}{a}\,\frac{2E_1\sin 2y}{\sqrt{1 - E_1^2\sin^4 y}}\,dy.$$

Deuxième région :

$$\Phi_2 = -45^\circ, \quad E_2 = \sqrt{(1-e)\,\frac{a(1+e) - r_1}{2er_1}} = \cos\frac{f_1}{2}, \quad \cos\frac{f}{2} = E_2\sin^2 y,$$

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 - e + \tfrac{3}{4}eE_2^2 - eE_2^2\cos 2y + \tfrac{1}{4}eE_2^2\cos 4y,$$

$$\cos f = \tfrac{3}{4}E_2^2 - 1 - E_2^2\cos 2y + \tfrac{1}{4}E_2^2\cos 4y,$$

$$\sin f = E_2(1 - \cos 2y)\sqrt{1 - E_2^2\sin^4 y},$$

$$n\,dt = -\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2E_2\sin 2y}{\sqrt{1 - E_2^2\sin^4 y}}\,dy.$$

Troisième région :

$$\Phi_3 = +45^\circ, \quad E_3 = \sqrt{(1-e)\,\frac{a(1+e) - r_2}{2er_2}} = -\cos\frac{f_2}{2}, \quad \cos\frac{f}{2} = -E_3\sin^2 y,$$

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 - e + \tfrac{3}{4}E_3^2 - eE_3^2\cos 2y + \tfrac{1}{4}eE_3^2\cos 4y,$$

$$\cos f = \tfrac{3}{4}E_3^2 - 1 - E_3^2\cos 2y + \tfrac{1}{4}E_3^2\cos 4y,$$

$$\sin f = E_3(\cos 2y - 1)\sqrt{1 - E_3^2\sin^4 y},$$

$$n\,dt = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2E_3\sin 2y}{\sqrt{1 - E_3^2\sin^4 y}}\,dy.$$

Quatrième région :

$$\Phi_4 = -45^\circ, \quad E_4 = \sqrt{\frac{r_2 - a(1-e)}{2ae}} = \sin\frac{u_2}{2}, \quad \sin\frac{u}{2} = E_4 \sin^2 y,$$

$$r = a(1 - e + \tfrac{3}{4}eE_4^2) - ae\,E_4^2\cos 2y + \tfrac{1}{4}ae\,E_4^2\cos 4y,$$

$$r\cos f = a(1 - e - \tfrac{3}{4}E_4^2) + aE_4^2\cos 2y - \tfrac{1}{4}aE_4^2\cos 4y,$$

$$r\sin f = aE_4\sqrt{1-e^2}\,(\cos 2y - 1)\sqrt{1 - E_4^2\sin^4 y},$$

$$n\,dt = -\frac{r}{a}\,\frac{2E_4\sin 2y}{\sqrt{1 - E_4\sin^4 y}}\,dy.$$

9. Dans les valeurs de $r$, $r\cos f$, $r\sin f$, $n\,dt$ données dans les n$^{os}$ 6 et 7, les termes périodiques sont multipliés par $\varepsilon^2$ et $\varepsilon'^2$. Il est manifeste que, si ces nombres $\varepsilon^2$ et $\varepsilon'^2$ sont très-petits, les développements des quantités $r\sin f$, $n\,dt$, $\frac{1}{r}, \ldots$, en séries procédant suivant les multiples de $x$, convergeront rapidement. D'autre part, les valeurs de $\varepsilon^2$ et $\varepsilon'^2$ données par les formules (5) et (5 *bis*) montrent clairement que les quantités $E_1^2$, $E_2^2, \ldots$ sont moindres que les quantités $\varepsilon^2$, $\varepsilon'^2$, de sorte que les formules du n° 8 devront être employées quand celles des n$^{os}$ 6 et 7 ne conduiront pas à des développements assez convergents.

10. Il est intéressant d'examiner comment varient les quantités $E_1^2$, $E_2^2$ quand le point $r_1$ occupe sur l'ellipse toutes les positions possibles. On reconnaît de suite qu'à mesure que ce point s'éloigne du périhélie $E_1$ augmente et $E_2$ diminue. Il est donc impossible de faire décroître ces deux quantités en même temps; il peut être utile de rechercher le minimum de la somme $E_1^2 + E_2^2$.

Si l'on pose

$$e = \sin\psi,$$

on a les formules bien connues

$$\sqrt{\frac{r}{2a}}\sin\frac{f}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)\sin\frac{u}{2},$$

$$\sqrt{\frac{r}{2a}}\cos\frac{f}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\cos\frac{u}{2};$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\frac{f}{2} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{u}{2},$$

$$\frac{df}{\cos^2\frac{f}{2}} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}},$$

$$r\,df = \cos\psi\,du.$$

L'expression $E_1^2 + E_2^2$, égale à

$$\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{f}{2},$$

a pour dérivée

$$\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\,du - \sin\frac{f}{2}\cos\frac{f}{2}\,df.$$

En remplaçant $\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$ et $\sin\frac{f}{2}\cos\frac{f}{2}$ par des quantités proportionnelles, et de même $du$ et $df$, on voit que le signe de cette dérivée est celui de

$$\frac{r^2}{a^2} - \cos^2\psi.$$

Il s'ensuit que la somme considérée est minimum pour

$$r = a\cos\psi.$$

Alors

$$\sin f = \sin u, \quad f = \pi - u,$$

et, par suite,

$$\cos\frac{f}{2} = \sin\frac{u}{2} \quad \text{et} \quad E_2^2 = E_1^2.$$

De plus la troisième relation citée donne

$$\operatorname{tang}^2\frac{f}{2} = \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right),$$

d'où

$$\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{f}{2} = 1 - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

On voit que, pour le minimum, chacune des quantités $E_1^2$ et $E_2^2$ est moindre que $\frac{1}{2}$, et que ces quantités sont d'autant plus petites que l'el-

lipse est plus excentrique. Les mêmes conclusions s'appliquent visiblement aux quantités $E_3^2$ et $E_4^2$.

**11.** Ce résultat conduit à rechercher pour quelles positions du point $r$, les quantités $E_1^2$ et $E_2^2$ sont moindres que $\frac{1}{2}$.

Il faut d'abord que $u$ soit un angle aigu, à cause de la valeur de $E_1$. La relation

$$\cos^2\frac{f}{2} < \frac{1}{2}$$

est satisfaite toutes les fois que l'angle $f$ est obtus.

Si, au foyer de l'ellipse d'où partent les rayons vecteurs, on mène une perpendiculaire au grand axe, elle rencontre l'ellipse en un point dont la distance au foyer est $a(1-e^2)$. L'arc d'ellipse compris entre ce point et le sommet du petit axe est le lieu des points considérés.

**12.** Dans le cas où l'on emploie les formules des n$^{os}$ 6 et 7, il est intéressant de rechercher encore quels doivent être les points de séparation pour que la somme $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2$ soit minimum. Comme

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = \frac{r_1 + r_2 - 2a(1-e)}{4ae} + \frac{1-e}{4e}\left[a(1+e)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2\right],$$

$r_1$ et $r_2$ étant indépendants l'un de l'autre, la somme considérée sera minimum quand on aura

$$r_1 = r_2 = a\sqrt{1-e^2} = a\cos\psi.$$

Ce résultat ne différant de celui du n° 10 que par la situation du point $r_2$, la plupart des calculs indiqués à cette occasion s'appliquent ici; on trouve

$$\sin^2\frac{u_1}{2} = \cos^2\frac{f_1}{2} = \sin^2\frac{u_2}{2} = \cos^2\frac{f_2}{2},$$

de sorte que

$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = 2\sin^2\frac{u_1}{2} = 1 - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

Les points de division qui correspondent au minimum de la somme $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2$ sont donc les mêmes que dans le cas du partage de l'ellipse en quatre parties, et les valeurs minima de $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2$ et de $E_1^2 + E_2^2$ sont

égales. Il ne faudrait pas en conclure que l'on ne gagne rien à employer les formules du n° 8. Celles-ci ne diffèrent de celles des n$^{os}$ 6 et 7 que par un changement d'argument qui ne modifie vraiment pas les formules et par la substitution

$$E^2 = 2\varepsilon^2,$$

de sorte que, dans le cas du minimum, le module $E^2$ des formules du n° 8 est réellement la moitié de celui des formules des n$^{os}$ 6 et 7.

13. Il peut être nécessaire d'augmenter beaucoup, dans une portion peu étendue de l'orbite, la convergence des développements. On y parvient aisément en ne représentant que cette partie de l'ellipse. Soient $r_3$ et $r_1$ les rayons vecteurs de deux points situés d'un même côté de l'axe. Supposons, pour fixer les idées, que le point $r_1$ soit dans la première moitié de l'ellipse, et le point $r_3$ entre le point $r_1$ et le périhélie.

Les formules du n° 8 permettent de représenter l'arc compris entre le périhélie et le point $r_1$ au moyen d'une variable $y$ variant de zéro à $\frac{\pi}{2}$. Si l'on veut ne représenter que l'arc $r_3 r_1$, il suffit d'exclure les points voisins du périhélie, et, pour représenter l'arc compris entre le périhélie et $r_1$, on exclura les points compris entre $r_1$ et $r_3$. On est ainsi conduit à poser

$$\sin y = h \sin z, \quad \cos y = l \cos u,$$

avec la relation

$$h^2 + l^2 = 1,$$

$h$ et $l$ étant les sinus et cosinus de l'anomalie $y$ relative au point $r_3$.

En faisant varier $z$ de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on représentera l'arc compris entre le périhélie et $r_3$, et, en faisant varier $u$ de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on représentera l'arc $r_3 r_1$. Les termes périodiques de $r$, $r\cos f$, ... seront multipliés par des puissances de $l$ ou de $h$; si l'arc $r_3 r_1$ est suffisamment petit, $l$ sera très-petit, de sorte qu'on aura notablement augmenté la convergence.

On trouvera dans le Mémoire cité de Hansen les formules relatives à ces anomalies $u$, que Hansen nomme *anomalies intermédiaires*. Nous remarquerons seulement qu'elles donnent le moyen de partager l'el-

lipse en autant de parties qu'on voudra et d'augmenter en quelque sorte indéfiniment la convergence des développements en séries.

14. La théorie exposée dans les paragraphes précédents est entièrement conforme aux idées de Hansen. L'introduction des fonctions elliptiques permet d'augmenter encore la convergence des développements.

Supposons qu'on ait partagé l'orbite de la comète en deux parties, et que les points de division soient symétriques par rapport au grand axe. L'anomalie partielle relative à la partie inférieure est alors définie par l'équation

$$\sin\frac{u}{2} = \pm\varepsilon\sin x,$$

où

$$\varepsilon = \sin\frac{u_1}{2},$$

et l'on a

$$r = a(1-e) + 2ae\varepsilon^2\sin^2 x,$$

$$r\cos f = a(1-e) - 2a\varepsilon^2\sin^2 x,$$

$$r\sin f = 2a\varepsilon\sqrt{1-e^2}\sin x\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x},$$

$$n\,dt = \frac{(1-e+2e\varepsilon^2\sin^2 x)\,2\varepsilon\cos x}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x}}\,dx,$$

et les formules relatives à la partie supérieure sont

$$\cos\frac{f}{2} = \varepsilon'\sin x,$$

où

$$\varepsilon' = \sin\frac{f_1}{2},$$

et

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 - e + 2e\varepsilon'^2\sin 2x,$$

$$\cos f = -1 + 2\varepsilon'^2\sin^2 x,$$

$$\sin f = 2\varepsilon'\sin x\sqrt{1-\varepsilon'^2\sin^2 x},$$

$$n\,dt = -\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2\varepsilon'\cos x}{\sqrt{1-\varepsilon'^2\sin^2 x}}\,dx.$$

15. Nous poserons pour la partie inférieure

$$x = \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega \quad (\text{mod. } \varepsilon),$$

E désignant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module $\varepsilon$. Alors les valeurs de $r$, $r \cos f$, ... deviennent

$$r = a(1-e) + 2ae\varepsilon^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega,$$

$$r \cos f = a(1-e) - 2a\varepsilon^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega,$$

$$r \sin f = 2a\varepsilon \sqrt{1-e^2} \sin \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega \, \Delta \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega,$$

$$ndt = \frac{2E}{\pi} \left(1 - e + 2e\varepsilon^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega\right) 2\varepsilon \cos \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega . d\omega,$$

et ces valeurs peuvent être développées en séries très-convergentes procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\omega$.

On a d'abord

$$\sin \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega \, \Delta \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega = -\frac{\pi}{2E} \frac{d}{d\omega} \cos \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega.$$

Le facteur $ndt$ exige le développement de

$$\sin^2 \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega \cos \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega.$$

Posons

$$\operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am} y \quad (\text{mod. } \varepsilon);$$

l'expression proposée deviendra

$$\cos^2 \operatorname{am} y \sin \operatorname{am} y.$$

C'est une fonction uniforme doublement périodique; elle a les mêmes périodes que $\sin \operatorname{am} y$; elle a deux infinis simples et deux infinis doubles; elle change de signe quand $y$ augmente de E. C'est donc une fonction linéaire de $\sin \operatorname{am} y$ et de sa seconde dérivée, c'est-à-dire de $\cos \operatorname{am} \frac{2E}{\pi} \omega$ et de sa dérivée seconde. En calculant cette seconde déri-

vée, on trouve en effet

$$\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega \cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2E}\right)^2 \frac{d^2}{d\omega^2} \cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} + \tfrac{1}{2} \cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega.$$

Les formules relatives à la partie inférieure deviennent ainsi

$$r = a(1-e) + 2ae\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega,$$

$$r \cos f = a(1-e) - 2a\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega,$$

$$r \sin f = -2a\sqrt{1-e^2} \left(\frac{\pi}{2E}\right) \varepsilon \frac{d}{d\omega} \cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega,$$

$$n \frac{dt}{d\omega} = 2\left(\frac{2E}{\pi}\right) \varepsilon \cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega + 2e \left(\frac{\pi}{2E}\right) \varepsilon \frac{d^2}{d\omega^2} \cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega.$$

On sait d'ailleurs développer $\sin^2 \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega$, $\cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega$, et par suite sa dérivée seconde en séries toujours convergentes procédant suivant les cosinus des multiples de $\omega$. On a effectivement

$$\varepsilon \cos \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega = \frac{2E}{\pi} 4\sqrt{q} \left(\frac{1}{1+q} \cos \omega + \frac{q}{1+q^3} \cos 3\omega + \frac{q^2}{1+q^5} \cos 5\omega + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E}{\pi} \omega = 8\left(\frac{\pi}{2E}\right)^2 \left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots\right)$$
$$- 8\left(\frac{\pi}{2E}\right)^2 \left(\frac{q}{1-q^2} \cos 2\omega + \frac{2q^2}{1-q^4} \cos 4\omega + \frac{3q^3}{1-q^6} \cos 6\omega + \ldots\right),$$

où

$$q = e^{-\pi \frac{E_1}{E}},$$

$E_1$ étant l'intégrale elliptique complète de première espèce, relative au module $\varepsilon_1$ complémentaire de $\varepsilon$.

16. Le développement des formules relatives à la partie supérieure exige plus d'attention.

Posons encore

$$x = \mathrm{am} \frac{2E'}{\pi} \omega \ (\mathrm{mod.}\ \varepsilon'),$$

E′ étant l'intégrale complète de première espèce relative au module $\varepsilon'$, et $\omega$ variant de $\frac{\pi}{2}$ à $3\frac{\pi}{2}$.

Nous aurons

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e + 2e\varepsilon'^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega},$$

$$\cos f = -1 + 2\varepsilon'^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega,$$

$$\sin f = -2\varepsilon' \frac{\pi}{2E'} \frac{d}{d\omega} \cos \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega,$$

$$n\,dt = -\frac{2\varepsilon'}{\sqrt{1-e^2}} \frac{2E'}{\pi} \frac{r^2}{a^2} \cos \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega\,d\omega,$$

de sorte que la véritable difficulté réside dans le développement de $r$ qui peut s'écrire

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{1 + \frac{2e}{1-e}\varepsilon'^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega}.$$

On peut procéder de la manière suivante.

Soient

$$\varepsilon'_1 = \sqrt{1-\varepsilon'^2}$$

et

$$\sqrt{\frac{2e}{1-e}} = \mathrm{tang\,am}\,\nu \quad (\mathrm{mod.}\ \varepsilon'_1);$$

alors

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{1 + \varepsilon'^2 \mathrm{tang}^2 \mathrm{am}\,\nu \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 - \frac{\varepsilon'^2 \mathrm{tang}^2 \mathrm{am}\,\nu \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega}{1 + \varepsilon'^2 \mathrm{tang}^2 \mathrm{am}\,\nu \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega}.$$

Remplaçons $\mathrm{tang\,am}(\nu, \varepsilon'_1)$ par

$$\sqrt{-1}\,\mathrm{sin\,am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon');$$

nous aurons

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 + \frac{\varepsilon'^2 \sin^2 \mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E'}{\pi}\omega}{1 - \varepsilon'^2 \sin^2 \mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E'}{\pi}\omega},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 + \frac{\mathrm{tang\,am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon')}{\Delta\,\mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon')}$$
$$\times \frac{\varepsilon'^2 \sin \mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \cos \mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \Delta\,\mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E'}{\pi}\omega}{1 - \varepsilon'^2 \sin^2 \mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \mathrm{am} \frac{2E'}{\pi}\omega},$$

et d'après des formules connues

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 + \sqrt{-1}\,\frac{\sin \mathrm{am}(\nu, \varepsilon'_1) \cos \mathrm{am}(\nu, \varepsilon'_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(\nu, \varepsilon'_1)}\,\frac{d\Pi\left(\nu\sqrt{-1}, \frac{2E'}{\pi}\omega\right)}{d\left(\frac{2E'}{\pi}\omega\right)},$$

la fonction $\Pi$ ayant la signification que lui attribue Jacobi.

Les deux facteurs du dernier terme peuvent être développés en séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\omega$ : on utilisera pour le premier la relation

$$\frac{\sin \mathrm{am}(\nu, \varepsilon'_1) \cos \mathrm{am}(\nu, \varepsilon'_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(\nu, \varepsilon'_1)} = -\frac{1}{\varepsilon'^2_1}\frac{d}{d\nu}\log \Delta\,\mathrm{am}(\nu, \varepsilon'_1).$$

17. Le développement de $r$ dans le dernier cas peut encore s'effectuer par la formule du binôme. En remplaçant dans la valeur de $r$ $\sin^2 \mathrm{am} \frac{2E'}{\pi}\omega$ par son développement, on aura

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{A + Bq\cos 2\omega + Cq^2 \cos 4\omega + \ldots},$$

A, B, C étant des coefficients numériques.

Le second membre de cette égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{A}\,\frac{1}{1 + \frac{B}{A}q\cos 2\omega + R},$$

où

$$R = \frac{1}{A}(Cq^2 \cos 4\omega + \ldots).$$

Si l'on pose

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{B}{A} q \cos 2\omega},$$

on aura

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{A} \frac{1}{1 + \frac{B}{A} q \cos 2\omega} \frac{1}{1+\varphi}.$$

A cause de la petitesse de $\varphi$, le dernier facteur pourra être développé en une série très-convergente. Le précédent et son carré qui entre dans la valeur de $n\,dt$ peuvent l'être par différentes méthodes. Si l'on pose

$$\frac{B}{A} q = \frac{2a}{1+a^2},$$

ce facteur devient

$$\frac{1+a^2}{1 + 2a\cos 2\omega + a^2},$$

dont le développement est

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}(1 + 2a\cos 2\omega + 2a^2 \cos 4\omega + \ldots)$$

son carré est

$$\frac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^3}[1 + a^2 + 2a\cos 2\omega + (3-a^2)a^2 \cos 4\omega + \ldots].$$

18. Les formules développées dans les trois derniers paragraphes permettent de développer toutes les quantités nécessaires à la détermination de la position de la comète en des séries très-convergentes procédant suivant les multiples des anomalies partielles, en supposant que l'orbite ait été divisée en deux parties, les points de division étant symétriques par rapport au grand axe.

Comme on le verra dans la suite de ce travail, une telle division de l'orbite est très-souvent insuffisante. Il sera très-facile d'introduire de

nouveaux points de division sans recommencer le calcul. Si l'on veut en placer un au périhélie, il suffira de poser

$$\sin\omega = +\sin^2\omega_1 = \frac{1-\cos 2\omega_1}{2}.$$

En donnant à $\omega_1$ les valeurs de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on n'obtiendra que la moitié de la partie inférieure qui commence au périhélie. Posons de même

$$\sin\omega = -\sin^2\omega_2 = -\frac{1-\cos 2\omega_2}{2},$$

et faisons varier $\omega_2$ de $-\frac{\pi}{2}$ à zéro, nous aurons représenté l'autre moitié de la partie inférieure de l'orbite.

La partie supérieure de l'orbite ne présentera pas plus de difficultés. Si l'on veut placer un point de division à l'aphélie, on fera les mêmes substitutions, et l'on fera varier $\omega_1$ de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$ pour la première moitié, et de $\pi$ à $\frac{3\pi}{2}$ pour la seconde.

S'il est encore nécessaire de partager les portions inférieures de l'orbite, on posera, comme il a été dit,

$$\cos\omega_1 = l\cos u,$$
$$\sin\omega_1 = h\sin z,$$

où

$$h^2 + l^2 = 1,$$

et l'application répétée de telles substitutions permettra de diviser l'orbite en autant de parties que l'on voudra.

## II.

**19.** Dans la Section précédente on a exposé, d'après les idées de Hansen et de M. Gylden, le moyen de représenter par des séries très-convergentes procédant suivant les sinus et cosinus des multiples d'un certain angle les quantités $r$, $r\cos f$, $r\sin f$, $n\,dt$. Il est aisé de tirer de ces développements celui de $\Delta^2$ au moyen des considérations suivantes.

Envisageant chacune des planètes et des comètes du système solaire comme décrivant une ellipse suivant les lois de Kepler, on aperçoit de suite que la connaissance de leurs positions initiales et du mouvement de l'une d'elles conduit à la connaissance du mouvement de toutes les autres.

Désignons par $\omega$ l'anomalie partielle pour la portion de l'orbite de la comète que nous voulons étudier, par M l'anomalie moyenne de la comète, par M′ celle de la planète, par $n'$ son moyen mouvement et posons

$$M' = c' + n' t,$$

$c'$ désignant une constante dépendant de la position initiale de la planète et changeant de valeur à chaque révolution de la comète.

Si l'on écrit

$$M' = c' + \frac{n'}{n} nt,$$

on voit qu'un calcul bien simple donnera le développement de M′ en une série procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\omega$. D'autre part, les formules de mouvement elliptique permettent d'en déduire les développements de

$$r', \quad r' \cos f', \quad r' \sin f'.$$

Quelques multiplications permettront enfin d'en déduire le développement de $\Delta^2$, développement qui se présentera sous la forme suivante :

$$\Delta^2 = P_0 + P_1 \sin\omega + P_2 \cos 2\omega + P_3 \sin 3\omega + \ldots,$$

$P_0$, $P_1$, $P_2$, ... étant des séries procédant suivant les sinus et cosinus de $c'$ et de ses multiples.

Nous supposerons que les points de divisions de l'orbite aient été tellement choisis, que les coefficients des polynômes $P_1$, $P_2$, ... soient très-petits par rapport à ceux de $P_0$ .Il faut pour cela que la variation de $\Delta^2$ dépende surtout de la variation de $c'$ et très-peu de celle de $\omega$. L'exemple qui sera développé plus loin montrera clairement la portée de cette condition.

20. On a vu que le calcul des perturbations que la planète produit dans le mouvement elliptique de la comète dépend surtout de la for-

mation de la quantité $\frac{1}{\Delta^3}$. Le développement en série de cette quantité est la partie vraiment difficile du calcul. $\Delta^2$ est représenté par une série procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $c'$ et des multiples de $\omega$. Cette série a un assez grand nombre de termes, et les premiers sont souvent du même ordre de grandeur. L'introduction des anomalies partielles a permis d'augmenter la convergence relativement à la variable $\omega$. Nous allons exposer actuellement le procédé ingénieux au moyen duquel M. Gylden augmente la convergence par rapport à $c'$.

Soit R l'ensemble de tous les termes qui suivent $P_0$;

$$\Delta^2 = P_0 + R,$$

d'où

$$\Delta^{-3} = P_0^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2} R P_0^{-\frac{5}{2}} + \frac{3.5}{2.4} R^2 P_0^{-\frac{7}{2}} \ldots.$$

Les puissances entières successives de R s'obtiennent aisément par la multiplication. La véritable difficulté réside dans la formation des puissances de $P_0$.

Soit

$$P_0 = A + A_1 \sin c' + A_2 \sin 2c' + \ldots + B_1 \cos c' + B_2 \cos 2c' + \ldots.$$

Les coefficients $A_2$, $B_2$ seront ordinairement très-petits par rapport à $A$, $A_1$, $B_1$. Si l'on écrit

$$P_0 = A + A_1 \sin c' + B_1 \cos c' + H,$$

on aura

$$P_0 = (A + A_1 \sin c' + B_1 \cos c')\left(1 + \frac{H}{A + A_1 \sin c' + B_1 \cos c'}\right).$$

Toute la difficulté du développement des puissances de $P_0$ réside dans celui des puissances du premier facteur. Posons

$$A_1 = -M \sin\varphi, \quad B_1 = M \cos\varphi, \quad \frac{M}{A} = \mu.$$

Le premier facteur de $P_0$ devient

$$A[1 + \mu \cos(c' + \varphi)].$$

Si la distance des deux astres peut devenir très-grande dans la partie considérée de l'orbite, le coefficient A sera grand, ce qui facilitera la formation des puissances négatives de $P_0$. Si cette distance peut devenir petite, $\mu$ sera presque égal à l'unité, et le développement des puissances négatives de

$$A[1 + \mu \cos(c' + \varphi)]$$

conduira à une série très-peu convergente.

**21.** Ce facteur peut s'écrire

$$A(1+\mu)\left[1 - \frac{2\mu}{1+\mu}\sin^2\tfrac{1}{2}(c' + F)\right].$$

Posons

$$\frac{2\mu}{1+\mu} = k^2, \quad \tfrac{1}{2}(c' + F) = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi \quad (\text{mod. } k),$$

K étant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module $k$. Le facteur précédent deviendra

$$A(1+\mu)\,\Delta^2 \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi \quad (\text{mod. } k).$$

Ce facteur et ses puissances pourront être développés en séries très-convergentes de sinus et de cosinus des multiples de $\xi$.

L'argument $\xi$ devra être substitué à l'argument $c'$. La substitution devra être effectuée partout, de sorte qu'il sera nécessaire de former les développements des sinus et cosinus des multiples de $\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$, des puissances des sinus et cosinus de $\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$. Ces questions peuvent être résolues de bien des manières. Il s'agit ici de calculs numériques bien plus que de développements analytiques. M. Gylden utilise une méthode appliquée à d'autres questions par Hansen dans plusieurs de ses Mémoires.

**22.** Soit, par exemple, à développer

$$\sin^{2n}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi.$$

Posons

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}},$$

K′ étant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module $k'$ complémentaire de $k$, et

$$\sin^{2n} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = X_0^{(2n)} - \frac{8q}{1-q^2} X_2^{(2n)} \cos 2\xi$$
$$- \frac{16q^2}{1-q^4} X_4^{(2n)} \cos 4\xi - \ldots - \frac{4.(2q)^i}{1-q^{2^i}} X_{2i}^{(2n)} \cos 2i\xi - \ldots.$$

D'après la relation facile à établir

$$\frac{d^2 \sin^{2n} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi}{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 d\xi^2} = 2n(2n-1) \sin^{2n-2} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi$$
$$- 4n^2(1+k^2) \sin^{2n} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi + 2n(2n+1) k^2 \sin^{2n+2} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi,$$

on aura l'équation récurrente

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} 4i^2 \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X_{2i}^{(2n)} &= -2n(2n-1) X_{2i}^{(2n-2)} \\ &\quad + 4n^2(1+k^2) X_{2i}^{(2n)} - 2n(2n+1) k^2 X_{2i}^{(2n+2)}, \end{aligned} \right.$$

équation qui permet de calculer de proche en proche les coefficients de même rang dans les développements des puissances successives de $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi$.

Posons à cet effet

$$\frac{X_{2i}^{(2n)}}{X_{2i}^{(2n-2)}} = p_{2n},$$

l'équation $(a)$ deviendra

$$0 = -2n(2n-1) + \left[4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right] p_{2n} - 2n(2n+1) k^2 p_{2n} p_{2n+2}.$$

Il est aisé de ramener cette équation récurrente à ne plus renfermer

qu'un seul coefficient variable. Posons en effet

$$F_{2n} = \frac{2n(2n-1)}{4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2},$$

l'équation $(a)$ deviendra

$$F_{2n} = p_{2n} - k^2 F_{2n} \frac{2n+1}{2n-1} p_{2n} p_{2n+2}.$$

Posons en outre

$$p_{2n} = F_{2n}\varpi_{2n},$$

nous aurons

$$1 = \varpi_{2n} - k^2 \frac{2n+1}{2n-1} F_{2n} F_{2n+2} \varpi_{2n} \varpi_{2n+2},$$

et si, pour abréger, on pose

$$\lambda_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n-1} k^2 F_{2n} F_{2n+2},$$

l'équation $(a)$ prendra définitivement la forme

$$(b) \qquad 1 = \varpi_{2n} - \lambda_{2n+2}\varpi_{2n}\varpi_{2n+2},$$

et sous cette forme elle permet de réduire $\varpi_{2n}$ en fraction continue

$$\varpi_{2n} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda_{2n+2}}{1 - \cfrac{\lambda_{2n+4}}{1 - \ddots}}}$$

L'expression de $F_{2n}$ donne

$$F_\infty = \frac{1}{1+k^2}, \quad \text{d'où} \quad \lambda_\infty = \frac{k^2}{(1+k^2)^2},$$

et, par suite, $\varpi_\infty$ est racine de l'équation du second degré

$$1 - z + \frac{k^2}{(1+k^2)^2} z^2 = 0.$$

La solution

$$\frac{1+k^2}{k^2}$$

donnerait

$$p_\infty = \frac{1}{k^2}.$$

Les coefficients du développement de $\sin^{2n}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$ augmenteraient indéfiniment avec $n$. On doit donc adopter l'autre solution

$$\varpi_\infty = 1 + k^2, \quad \text{d'où} \quad p_\infty = 1.$$

Adoptant la valeur de $1 + k^2$ pour celle de $\varpi_{2n+2}$, correspondant à une valeur très-grande de $2n + 2$, on remontera de proche en proche au moyen de l'équation $(b)$, et l'on obtiendra ainsi toutes les valeurs des quantités $\varpi$, par suite celles des quantités $p$, et, comme on connaît $X_{2i}^{(0)}$ et $X_{2i}^{(2)}$, on en conclura toutes les quantités X.

23. Si la valeur $1 + k^2$ de $\varpi_{2n+2}$ ne paraît pas assez approchée, on peut remarquer que, si l'on pose

$$\varpi_{2n} = f_{2n}(1 + k^2)\left[1 - \frac{4i^2}{4n^2}\frac{\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{1 + k^2}\right],$$

$f_{2n}$ aura pour limite l'unité. D'autre part, l'équation $(b)$ devient

$$(c) \qquad 1 = f_{2n}\left[1 + k^2 - \frac{4i^2}{4n^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 - k^2\frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}f_{2n+2}\right];$$

d'où il suit que $f_{2n}$ diffère de l'unité d'une quantité du deuxième ordre par rapport à $\frac{i}{n}$. Posons

$$f_{2n} = 1 + f'_{2n},$$

et négligeons les termes dont l'ordre dépasse le second, nous aurons

$$f'_{2n} - k^2 f'_{2n+2} = \frac{4i^2}{4n^2}\left(\frac{\pi}{2H}\right)^2 + \frac{k^2}{2n(2n+2)}.$$

Si l'on admet que

$$f'_{2n+2} = f'_{2n},$$

on aura, aux termes près du troisième ordre,

$$f'_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{k^2 + 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)}{1 - k^2}.$$

Posant encore

$$f_{2n} = 1 + \frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{k^2 + 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{1 - k^2} + f''_{2n},$$

substituant dans l'équation $(c)$, négligeant les termes dont l'ordre dépasse le troisième, et supposant

$$f''_{2n+2} = f''_{2n},$$

on obtiendra $f_{2n}$ aux termes près du quatrième ordre, et ainsi de suite.

**24.** Si l'on n'a besoin des puissances de $\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$ que pour des valeurs peu considérables de $n$, il suffira de modifier l'emploi de l'équation récurrente $(a)$, de façon à calculer d'abord les coefficients des développements des premières puissances de $\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$, pour en déduire ceux des puissances plus élevées. On posera

$$\frac{X_{2i}^{2n-2}}{X_{2i}^{2n}} = q_{2n-2}.$$

L'équation $(a)$ deviendra

$$(a')\quad 0 = -2n(2n+1)k^2 + \left[4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right]q_{2n} - 2n(2n-1)q_{2n}q_{2n-2}.$$

Opérant comme au n° **21**, on posera

$$G_{2n} = \frac{2n(2n+1)k^2}{4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2},$$

puis

$$q_{2n} = G_{2n}\rho_{2n}, \quad \mu_{2n} = \frac{1}{k^2}\frac{2n+1}{2n+3}G_{2n}G_{2n-2},$$

et l'équation récurrente $(a')$ deviendra

$$(b')\qquad 1 = \rho_{2n} - \mu_{2n-2}\rho_{2n}\rho_{2n-2}.$$

On traitera cette équation comme celle du n° **21**, avec cette seule différence qu'on en tirera $\rho_{2n}$ en fonction de $\rho_{2n-2}$, et que les valeurs initiales sont connues exactement

$$\mu_0 = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

d'où

$$\rho_2 = 1.$$

Il y a exception dans le cas où $i = 0$. Alors

$$q_0 = \frac{1}{X_0^{(2)}} \quad \text{et} \quad \mu_0 \rho_0 = \frac{\mu_0 q_0}{G_0} = \frac{1}{3k^2} \frac{G^2}{X_0^{(2)}}.$$

**25.** Des procédés tout à fait identiques aux précédents s'appliquent au développement des puissances impaires de $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi$, et à ceux des puissances de $\cos \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi$ et de $\Delta \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi$. Nous ne nous y arrêterons pas. Il nous suffira de dire que l'on part des formes suivantes :

$$\sin^{2n+1} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} X_1^{(2n+1)} \sin x + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} X_3^{(2n+1)} \sin 3x + \ldots,$$

$$\cos^{2n} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = Y_0^{(2n)} + \frac{8q}{1-q} Y_0^{2n} \cos 2x + \frac{16q^2}{1-q^4} Y_4^{(2n)} \cos 4x + \ldots,$$

$$\cos^{2n+1} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} Y_1^{(2n+1)} \cos x + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3} Y_3^{(2n+1)} \cos 3x + \ldots,$$

$$\Delta^{2n} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = Z_0^{(2n)} + \frac{8q}{1-q^2} Z_2^{(2n)} \cos 2x + \frac{16q^2}{1-q^4} Z_4^{(2n)} \cos 4x + \ldots$$

$$\Delta^{2n+1} \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = Z_0^{(2n+1)} + \frac{4q}{1+q^2} Z_2^{(2n+1)} \cos 2x + \frac{4q^2}{1+q^2} Z_4^{(2n+1)} \cos 4x + \ldots$$

et des formules

$$\frac{d^2 \cos^n \operatorname{am} x}{dx^2} = n(n-1) k'^2 \cos^{n-2} \operatorname{am} x$$
$$+ n^2 (1 - 2k'^2) \cos^n \operatorname{am} x - n(n+1) k'^2 \cos^{n+2} \operatorname{am} x,$$

$$\frac{d^2 \Delta^n \operatorname{am} x}{dx^2} = -n(n-1) k'^2 \Delta^{n-2} \operatorname{am} x + n^2 (1 + k'^2) \Delta^n \operatorname{am} x - n(n+1) \Delta^{n+2} \operatorname{am} x.$$

**26.** La même méthode peut être appliquée au développement des fonctions

$$\sin n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi, \quad \cos n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi.$$

Posons

$$\sin n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = 2\Sigma_1^{(n)} \sin \xi + 2\Sigma_2^{(n)} \sin 2\xi + 2\Sigma_3^{(n)} \sin 3\xi + \ldots,$$

$$\cos n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi = \Gamma_0^{(n)} + 2\Gamma_1^{(n)} \cos \xi + 2\Gamma_2^{(n)} \cos 2\xi + \ldots.$$

On a

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 d^2 \sin n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi}{d\xi^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2} n^2 (1 + k'^2) \sin n \operatorname{am} \frac{\pi}{2K}\xi$$
$$- \tfrac{1}{4} n(n+1) k^2 \sin(n+2) \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi - \tfrac{1}{4} n(n-1) k^2 \sin(n-2) \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi,$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 d^2 \cos n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi}{d\xi^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2} n^2 (1 + k'^2) \cos n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$$
$$- \tfrac{1}{4} n(n+1) k^2 \cos(n+2) \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi - \tfrac{1}{4} n(n-1) k^2 \sin(n-2) \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi.$$

On en conclut les relations récurrentes

$$\tfrac{1}{4} n(n-1) k^2 \Sigma_i^{(n-2)} + \left[\tfrac{1}{2} n^2 (1 + k'^2) - i^2 \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right] \Sigma_i^{(n)} + \tfrac{1}{4} n(n+1) k^2 \Sigma_i^{(n+2)} = 0,$$

$$\tfrac{1}{4} n(n-1) k^2 \Gamma_i^{(n-2)} + \left[\tfrac{1}{2} n^2 (1 + k'^2) - i^2 \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right] \Gamma_i^{(n)} + \tfrac{1}{4} n(n+1) k^2 \Gamma_i^{(n+2)} = 0,$$

relations que l'on pourra traiter absolument comme celles des numéros précédents.

L'identité de forme de ces deux relations montre que

$$\frac{\Sigma_i^{(n+2)}}{\Gamma_i^{(n+2)}} = \frac{\Sigma_i^{(n)}}{\Gamma_i^{(n)}},$$

de sorte que le rapport

$$\frac{\Sigma_i^{(n)}}{\Gamma_i^{(n)}}$$

est indépendant de $n$, ou, plus exactement, n'a que deux valeurs applicables, l'une quand $n$ est pair, l'autre quand $n$ est impair.

Les développements connus de $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$ et de $\cos \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$ et de leur carrés montrent que les deux indices d'un quelconque des coefficients $\Sigma$ et $\Gamma$ sont à la fois pairs ou impairs, et l'on trouve, en faisant $n = 1$ ou $n = 2$,

$$\frac{\Sigma_{2i}^{(2n)}}{\Gamma_{2i}^{(2n)}} = \frac{1 - q^{2i}}{1 + q^{2i}}, \quad \frac{\Sigma_{2i+1}^{2n+1}}{\Gamma_{2i+1}^{2n+1}} = \frac{1 + q^{2i+1}}{1 - q^{2i+1}},$$

formules qui seront de la plus haute importance dans le calcul des coefficients $\Sigma$ et $\Gamma$, puisqu'elles permettent de déduire presque immédiatement les coefficients $\Sigma$ des coefficients $\Gamma$.

Nous terminerons là les indications relatives au développement des sinus et cosinus des multiples de $\operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \xi$ et des puissances des fonctions elliptiques élémentaires de $\xi$. Dans son beau Mémoire (*Studien auf dem Gebiete der Storungstheorie, Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, 1871), M. Gylden indique de nombreuses méthodes pouvant conduire à la formation des coefficients de ces développements. Ses travaux sur ce sujet intéressent à la fois les géomètres et les astronomes. Nous avons essayé de réunir, dans ce travail, ce qui nous a paru le plus immédiatement utile à ces derniers. Nous allons actuellement essayer d'éclaircir la méthode, en en commençant l'application à un cas particulier.

## III.

**27.** L'objet principal de cette étude étant la comparaison de la méthode de M. Gylden à celle de Hansen, nous avons choisi comme exemple la détermination des perturbations que la Terre exerce sur la comète d'Encke, ainsi que l'avait fait Hansen lui-même dans son Mémoire couronné (*Mémoire sur le calcul des perturbations qu'éprouvent les comètes*). Cherchant surtout dans ce calcul un élément d'appréciation, nous ne nous sommes pas préoccupé de pousser le calcul jusqu'au bout, mais seulement de former le développement du carré de la distance des deux astres. Pour cette raison aussi, nous avons adopté pour les éléments de l'orbite de la comète et de celle de la Terre les éléments dont Hansen s'était servi, savoir :

$$\begin{aligned}
T &= 1208'',1466, & & \\
\log a &= 0,3466760, & a' &= 1, \\
e &= 0,8446760, & e' &= 0,0167796, \\
\varpi_1 &= 182^\circ 48' 55'',8, & \varpi' &= 100^\circ 0' 13'',0, \\
\Omega &= 334^\circ 29' 28'',8, & & \\
i &= 13^\circ 20' 40'',2. & &
\end{aligned}$$

T désignant la durée de la révolution sidérale de la comète, ☊ la longitude de son nœud ascendant sur l'écliptique, $\varpi_1$ l'arc compris entre le nœud ascendant et le périhélie, $i$ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, $a$ le demi-grand axe de l'orbite de la Terre, $e'$ son excentricité, $\varpi'$ la longitude de son périhélie. Nous avons divisé l'orbite de la comète en deux parties, les points de séparation étant symétriques par rapport à son grand axe, et déterminés par cette condition que leur distance au Soleil soit égale à 1. Enfin nous n'avons développé les calculs que pour la partie inférieure de l'orbite.

28. Désignant par $u_1$ l'anomalie excentrique du premier point de séparation, par $u$ celle d'un point quelconque de la partie inférieure de l'orbite et par $\omega$ l'anomalie partielle, on a (n° 14)

$$\sin\frac{u}{2} = \pm\,\varepsilon \sin\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega \quad (\text{mod. } \varepsilon),$$

où

$$\varepsilon = \sin\frac{u_1}{2},$$

$\omega$ devant varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, le signe $-$ se rapportant aux valeurs de $\omega$ comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et zéro, le signe $+$ à celles qui sont comprises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Posant ensuite

$$q = e^{-\frac{\pi \mathrm{E}_1}{\mathrm{E}}},$$

$\mathrm{E}_1$ étant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module $\varepsilon_1$ complémentaire de $\varepsilon$, on a trouvé

$$\log\varepsilon = \bar{1},6211482,$$

$$\frac{u_1}{2} = 24^\circ\,42'\,24'',04,$$

$$\log\mathrm{E} = 0,2167170,$$

$$\log\mathrm{E}_1 = 0,3652829,$$

$$\log q = \bar{2},079121.$$

On en a conclu

$$\varepsilon \cos \operatorname{am} \frac{2E}{\pi}\omega = [\bar{1},6158436] \cos\omega + [\bar{3},700144] \cos 3\omega$$
$$+ [\bar{5},7793] \cos 5\omega + [\bar{7},86] \cos 7\omega + [\bar{8}] \cos 9\omega,$$

$$\varepsilon^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E}{\pi}\omega = [\bar{2},9515618] - [\bar{2},941079] \cos 2\omega$$
$$- [\bar{3},321168] \cos 4\omega - [\bar{5},5764] \cos 6\omega - [\bar{7},78] \cos 8\omega,$$

et ensuite, par l'application des formules données à la fin du n° 14,

$$r = [\bar{1},8326789] - [\bar{1},515147] \cos 2\omega$$
$$- [\bar{3},89524] \cos 4\omega - [\bar{4},1505] \cos 6\omega - [\bar{6},35] \cos 8\omega,$$

$$r \cos f = - [\bar{2},718677] + [\bar{1},588456] \cos 2\omega$$
$$+ [\bar{3},968545] \cos 4\omega + [\bar{4},2238] \cos 6\omega + [\bar{6},43] \cos 8\omega,$$

$$r \sin f = [\bar{1},9712033] \sin\omega + [\bar{2},532625] \sin 3\omega$$
$$+ [\bar{4},8336] \sin 5\omega + [\bar{5},0588] \sin 7\omega + [\bar{7},25] \sin 9\omega,$$

$$nt - c = [\bar{1},3085121] \sin\omega - [\bar{2},316541] \sin 3\omega$$
$$- [\bar{4},6622] \sin 5\omega - [\bar{6},898] \sin 7\omega - [\bar{7},0] \sin 9\omega;$$

$n$ est exprimée en prenant le rayon du cercle pour unité ; et les nombres entre crochets sont les logarithmes des coefficients dont ils tiennent la place.

29. Soient $\varpi$ la longitude du périhélie de la comète, $f'$ l'anomalie vraie de la Terre. On a

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \sin^2 \frac{i}{2} \cos[f' + f + (\varpi' - \Omega) + (\varpi - \Omega)]$$
$$- 2rr' \cos^2 \frac{i}{2} \cos[f' - f + (\varpi' - \Omega) - (\varpi - \Omega)].$$

Les nombres donnés au n° 27 donnent

$$(\varpi' - \Omega) + (\varpi - \Omega) = 308^\circ\, 19'\, 40'',0,$$
$$(\varpi' - \Omega) - (\varpi - \Omega) = -57^\circ\, 18'\, 11'',6.$$

On en conclut

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - Arr'\cos f\cos f' - Brr'\sin f\sin f' \\ - Crr'\cos f\sin f' - Drr'\sin f\cos f'$$

ou

$$\log A = 0,0344462,$$
$$\log B = 0,0207989,$$
$$\log C = 0,2257077,$$
$$\log D = 0,2146266,$$

de sorte que, pour former le développement de $\Delta^2$, il ne reste plus qu'à obtenir les développements des quantités $r'$, $r'\cos f'$, $r'\sin f'$.

30. Posons, comme au n° 19,

$$M' = c' + n't,$$

et soit, pour abréger,

$$nt = c + A_1\sin\omega - A_3\sin 3\omega - A_5\sin 5\omega - A_7\sin 7\omega - \ldots.$$

On aura

$$M' = c' + \frac{n'}{n}c + \frac{n'}{n}(A_1\sin\omega - A_3\sin 3\omega - A_5\sin 5\omega - \ldots).$$

Posons

$$c' + \frac{n'}{n}c = c_1,$$

nous aurons, tous calculs faits,

$$M' = c_1 + [\bar{1},8220333]\sin\omega - [\bar{2},836062]\sin 3\omega - [\bar{3},181712]\sin 5\omega \\ - [\bar{5},418]\sin 7\omega - [\bar{7},520]\sin 9\omega.$$

On a d'ailleurs

$$r' = 1 - e\cos u',$$
$$r'\cos f' = \cos u' - e',$$
$$r'\sin f' = \sqrt{1 - e'^2}\sin u',$$

et

$$\cos u' = -\frac{e'}{2} + \left(1 - \frac{3}{8}e'^2\right)\cos M' + \left(\frac{e'}{2} - \frac{e'^3}{3}\right)\cos 2M' + \frac{3}{8}e'^2\cos 3M' + \frac{1}{3}e'^3\cos 4M' + \ldots,$$

$$\sin u' = \left(1 - \frac{e'^2}{8}\right)\sin M' + \left(\frac{e'}{2} - \frac{e'^3}{6}\right)\sin 2M' + \frac{3}{8}e'^2\sin 3M' + \frac{1}{3}e'^3\sin 4M',$$

en négligeant les termes du quatrième ordre par rapport à $e'$.

Ces formules, réduites en nombres, donnent

$$r'^2 = [0,0001834] - [\bar{2},525796]\cos M' - [\bar{4},1486]\cos 2M' - [\bar{6},08]\cos 3M',$$

$$r'\cos f' = -[\bar{2},400873] + [\bar{1},9999541]\cos M'$$
$$+ [\bar{3},92367]\cos 2M' + [\bar{4},0237]\cos 3M' + [\bar{6},20]\cos 4M',$$

$$r'\sin f' = [\bar{1},9999236]\sin M' + [\bar{3},923648]\sin 2M'$$
$$+ [\bar{4},0237]\sin 3M' + [\bar{6},20]\sin 4M';$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à développer les sinus et cosinus de M′ et de ses premiers multiples, suivant les sinus et cosinus des multiples de $\omega$.

31. Soit, pour abréger,

$$M' = c_1 + \alpha.$$

On aura

$$\cos iM' = \cos ic_1 \cos i\alpha - \sin ic_1 \sin i\alpha,$$
$$\sin iM' = \sin ic_1 \cos i\alpha + \cos ic_1 \cos i\alpha;$$

de sorte que, pour développer $\Delta^2$ suivant les sinus et cosinus des multiples de $c_1$ et des multiples de $\omega$, il suffira de développer

$$\left.\begin{matrix}\sin i\alpha \\ \cos i\alpha\end{matrix}\right\} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

On a trouvé

$$\alpha = 0,6637939 \sin\omega - 0,0685586 \sin 3\omega$$
$$- 0,0015195 \sin 5\omega - 0,0000262 \sin 7\omega - 0,0000003 \sin 9\omega.$$

Posons

$$\beta = 0{,}0015195 \sin 5\omega + 0{,}0000262 \sin 7\omega + 0{,}0000003 \sin 9\omega;$$

$$m = 0{,}6637939,$$

$$n = 0{,}0685586,$$

$$\gamma = m \sin\omega - n \sin 3\omega.$$

Alors

$$\alpha = \gamma - \beta;$$

d'où

$$\sin\alpha = \sin\gamma - \beta\cos\gamma - \frac{\beta^2}{2}\sin\gamma,$$

$$\cos\alpha = \cos\gamma + \beta\sin\gamma - \frac{\beta^2}{2}\cos\gamma,$$

en négligeant $\beta^3$, ce qui est visiblement permis.

Le calcul de $\beta^2$ n'offre aucune difficulté; on trouve

$$\tfrac{1}{2}\beta^2 = 0{,}0000006 - 0{,}0000006 \cos 10\omega.$$

Le développement de $\sin\gamma$ et de $\cos\gamma$ est plus difficile; on a procédé comme il suit.

32. On a

$$\sin\gamma = \sin[m\sin\omega]\cos[n\sin 3\omega] - \cos[m\sin\omega]\sin[n\sin 3\omega],$$

$$\cos\gamma = \cos[m\sin\omega]\cos[n\sin 3\omega] + \sin[m\sin\omega]\sin[n\sin 3\omega].$$

D'autre part, on a, par la formule de Maclaurin,

$$\sin[m\sin\omega] = \frac{m}{1}\sin\omega - \frac{m^3}{1.2.3}\sin^3\omega + \frac{m^5}{1.2.3.4.5}\sin^5\omega - \ldots,$$

$$\cos[m\sin\omega] = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2\omega + \frac{m^2}{1.2.3.4}\sin^4\omega - \ldots,$$

développements qu'il est nécessaire de pousser ici jusqu'à la neuvième

puissance de $\sin\omega$. On a trouvé

$$\log\frac{m}{1} = \bar{1},8220333,$$

$$\log\frac{m^2}{1.2} = \bar{1},3430366,$$

$$\log\frac{m^3}{1.2.3} = \bar{2},6879486,$$

$$\log\frac{m^4}{1.2.3.4} = \bar{3},907922,$$

$$\log\frac{m^5}{1.2.3.4.5} = \bar{3},030985,$$

$$\log\frac{m^6}{1.2.3.4.5.6} = \bar{4},07487,$$

$$\log\frac{m^7}{1.2.3.4.5.6.7} = \bar{5},052,$$

$$\log\frac{m^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} = \bar{7},97,$$

$$\log\frac{m^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} = \bar{8},8.$$

On a employé les formules suivantes :

$$2\sin^2\omega = -\cos 2\omega + 1,$$
$$2^3\sin^4\omega = \cos 4\omega - 4\cos 2\omega + 3,$$
$$2^5\sin^6\omega = -\cos 6\omega + 6\cos 4\omega - 15\cos 2\omega + 10,$$
$$2^7\sin^8\omega = \cos 8\omega - 8\cos 6\omega + 28\cos 4\omega - 56\cos 2\omega + 35,$$

et

$$2^2\sin^3\omega = -\sin 3\omega + 3\sin\omega,$$
$$2^4\sin^5\omega = \sin 5\omega - 5\sin 3\omega + 10\sin\omega,$$
$$2^6\sin^7\omega = -\sin 7\omega + 7\sin 5\omega - 21\sin 3\omega + 35\sin\omega,$$
$$2^8\sin^9\omega = \sin 9\omega - 9\sin 7\omega + 36\sin 5\omega - 84\sin 3\omega + 126.$$

L'application de ces formules a donné

$$\sin[m\sin\omega] = [\bar{1},7978896]\sin\omega$$
$$+ [\bar{2},073898]\sin 3\omega + [\bar{5},819]\sin 5\omega + [\bar{7},3]\sin 7\omega,$$

$$\cos[m\sin\omega] = [\bar{1},9507742]$$
$$+ [\bar{1},0259859]\cos 2\omega + [\bar{4},9952]\cos 4\omega + [\bar{6},556]\cos 6\omega.$$

On a procédé de même à l'égard de $\sin[n \sin 3\omega]$ et de $\cos[n \sin 3\omega]$. On a trouvé

$$\log \frac{n}{1} = \bar{2},836062,$$

$$\log \frac{n^2}{1.2} = \bar{3},37109,$$

$$\log \frac{n^3}{1.2.3} = \bar{5},730,$$

$$\log \frac{n^4}{1.2.3.4} = \bar{7},96,$$

et l'application des formules

$$2\sin^2 3\omega = -\cos 6\omega + 1,$$
$$2^3 \sin^4 3\omega = \cos 12\omega - 4\cos 6\omega + 3,$$
$$2^2 \sin^3 3\omega = \sin 9\omega - 3\sin 3\omega,$$

a donné

$$\sin[n \sin 3\omega] = [\bar{2},8358066] \sin 3\omega + [\bar{5},1271] \sin 9\omega,$$
$$\cos[n \sin 3\omega] = [\bar{1},9994895] + [\bar{3},06989] \cos 6\omega + [\bar{7}] \cos 12\omega;$$

on en a conclu

$$\sin\gamma = 0,6235578 \sin\omega - 0,0493419 \sin 3\omega - 0,0039401 \sin 5\omega + 0,0003345 \sin 7\omega$$
$$- 0,0000051 \sin 9\omega - 0,0000007 \sin 11\omega,$$

$$\cos\gamma = 0,8921984 + 0,1275555 \cos 2\omega - 0,0204610 \cos 4\omega + 0,0006463 \cos 6\omega$$
$$+ 0,0000643 \cos 8\omega - 0,0000036 \cos 10\omega + 0,0000002 \cos 12\omega.$$

33. Des valeurs précédentes on déduit par la simple multiplication

$$\beta \sin\gamma = -0,0000030 - 0,0000373 \cos 2\omega + 0,0004732 \cos 4\omega$$
$$- 0,0004656 \cos 6\omega + 0,0000294 \cos 8\omega$$
$$+ 0,0000035 \cos 10\omega - 0,0000002 \cos 12\omega,$$

$$\beta \cos\gamma = -0,0000160 \sin\omega + 0,0000966 \sin 3\omega + 0,0013574 \sin 5\omega$$
$$+ 0,0001203 \sin 7\omega - 0,0000135 \sin 9\omega + 0,0000002 \sin 11\omega,$$

$$\frac{\beta^2}{2} \sin\gamma = 0,0000004 \sin\omega + 0,0000002 \sin 9\omega - 0,0000002 \sin 11\omega,$$

$$\frac{\beta^2}{2} \cos\gamma = 0,0000005 + 0,0000001 \cos 2\omega - 0,0000005 \cos 10\omega,$$

et, en rassemblant ces résultats, on trouve

$$\begin{aligned}\sin\alpha = {} & [\bar{1},7948876]\sin\omega - [\bar{2},694065]\sin 3\omega - [\bar{3},724071]\sin 5\omega \\ & + [\bar{4},3308]\sin 7\omega + [\bar{6},914]\sin 9\omega - [\bar{7},8]\sin 11\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha = {} & [\bar{1},9504598] + [\bar{1},1055717]\cos 2\omega - [\bar{2},300765]\cos 4\omega \\ & + [\bar{4},2570]\cos 6\omega + [\bar{5},972]\cos 8\omega + [\bar{7},6]\cos 10\omega.\end{aligned}$$

34. On a déduit de ces développements ceux des sinus et cosinus des multiples de $\alpha$ par les formules

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha, \\ \sin 3\alpha &= 2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha, \\ \cos 3\alpha &= 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha, \\ \sin 4\alpha &= 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha, \\ \cos 4\alpha &= 2\cos^2 2\alpha - 1,\end{aligned}$$

et l'on a obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha = {} & [0,01115]\sin\omega + [\bar{3},490]\sin 3\omega - [\bar{2},4518]\sin 5\omega \\ & + [\bar{4},87]\sin 7\omega + [\bar{4},24]\sin 9\omega - [\bar{5},0]\sin 11\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha = {} & [\bar{1},78439] + [\bar{1},65319]\cos 2\omega - [\bar{2},7406]\cos 4\omega \\ & - [\bar{3},6464]\cos 6\omega + [\bar{4},89]\cos 8\omega + [\bar{5},23]\cos 10\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha = {} & [0,03238]\sin\omega + [\bar{1},30681]\sin 3\omega - [\bar{2},8155]\sin 5\omega \\ & - [\bar{3},387]\sin 7\omega + [\bar{3},037]\sin 9\omega - [\bar{5},3]\sin 11\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha = {} & [\bar{1},40211] + [\bar{1},91100]\cos 2\omega - [\bar{2},6596]\cos 4\omega \\ & - [\bar{2},3755]\cos 6\omega + [\bar{3},312]\cos 8\omega \\ & + [\bar{4},41]\cos 10\omega - [\bar{5},3]\cos 12\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 4\alpha = {} & [\bar{1},898]\sin\omega + [\bar{1},708]\sin 3\omega - [\bar{2},92]\sin 5\omega \\ & - [\bar{2},15]\sin 7\omega + [\bar{3},3]\sin 9\omega,\end{aligned}$$

$$\cos 4\alpha = -[\bar{2},72] + [0,0195]\cos 2\omega + [\bar{2},81]\cos 4\omega - [\bar{2},78]\cos 6\omega.$$

35. Pour parvenir à la formation des quantités $rr' \cos f \cos f', \ldots$, on a d'abord obtenu les résultats suivants :

$$r \cos f \cos \alpha = -0{,}0220566 + 0{,}3359186 \cos 2\omega + 0{,}0341075 \cos 4\omega - 0{,}0031228 \cos 6\omega - 0{,}0000498 \cos 8\omega + 0{,}0000175 \cos 10\omega + 0{,}0000005 \cos 12\omega,$$

$$r \sin f \sin \alpha = 0{,}2909391 - 0{,}3043956 \cos 2\omega + 0{,}0102422 \cos 4\omega + 0{,}0032127 \cos 6\omega + 0{,}0000072 \cos 8\omega - 0{,}0000057 \cos 10\omega + 0{,}0000001 \cos 12\omega,$$

$$r \cos f \sin \alpha = -0{,}1628713 \sin \omega + 0{,}1195330 \sin 3\omega - 0{,}0064159 \sin 5\omega - 0{,}0012149 \sin 7\omega + 0{,}0000129 \sin 9\omega + 0{,}0000020 \sin 11\omega - 0{,}0000002 \sin 13\omega,$$

$$r \sin f \cos \alpha = 0{,}7777946 \sin \omega + 0{,}0994758 \sin 3\omega - 0{,}0066563 \sin 5\omega - 0{,}0002463 \sin 7\omega + 0{,}0000410 \sin 9\omega + 0{,}0000018 \sin 11\omega,$$

$$r \cos f \cos 2\alpha = 0{,}05511 + 0{,}20382 \cos 2\omega + 0{,}09494 \cos 4\omega - 0{,}00810 \cos 6\omega - 0{,}00112 \cos 8\omega + 0{,}00013 \cos 10\omega,$$

$$r \sin f \sin 2\alpha = 0{,}48013 - 0{,}46164 \cos 2\omega - 0{,}03181 \cos 4\omega + 0{,}01320 \cos 6\omega + 0{,}00021 \cos 8\omega - 0{,}00009 \cos 10\omega,$$

$$r \cos f \sin 2\alpha = -0{,}25210 \sin \omega + 0{,}18845 \sin 3\omega + 0{,}00692 \sin 5\omega - 0{,}00539 \sin 7\omega + 0{,}00001 \sin 9\omega + 0{,}00004 \sin 11\omega,$$

$$r \sin f \cos 2\alpha = 0{,}36766 \sin \omega + 0{,}25728 \sin 3\omega - 0{,}01561 \sin 5\omega - 0{,}00321 \sin 7\omega + 0{,}00026 \sin 9\omega + 0{,}00001 \sin 11\omega,$$

$$r \cos f \cos 3\alpha = 0{,}14450 + 0{,}05006 \cos 2\omega + 0{,}15814 \cos 4\omega - 0{,}00338 \cos 6\omega - 0{,}00480 \cos 8\omega + 0{,}00028 \cos 10\omega + 0{,}00006 \cos 12\omega,$$

$$r \sin f \sin 3\alpha = 0{,}50757 - 0{,}39197 \cos 2\omega - 0{,}14349 \cos 4\omega + 0{,}02568 \cos 6\omega + 0{,}00268 \cos 8\omega - 0{,}00046 \cos 10\omega - 0{,}00001 \cos 12\omega,$$

$$r \cos f \sin 3\alpha = -0{,}22716 \sin \omega + 0{,}18052 \sin 3\omega + 0{,}04715 \sin 5\omega - 0{,}01131 \sin 7\omega - 0{,}00082 \sin 9\omega + 0{,}00018 \sin 11\omega - 0{,}00001 \sin 13\omega,$$

$$r \sin f \cos 3\alpha = -0{,}13034 \sin\omega + 0{,}41188 \sin 3\omega + 0{,}00377 \sin 5\omega$$
$$- 0{,}01258 \sin 7\omega + 0{,}00041 \sin 9\omega + 0{,}00015 \sin 11\omega$$
$$- 0{,}00001 \sin 13\omega.$$

$$r \cos f \cos 4\alpha = 0{,}205 - 0{,}057 \cos 2\omega + 0{,}186 \cos 4\omega + 0{,}021 \cos 6\omega$$
$$- 0{,}012 \cos 8\omega,$$

$$r \sin f \sin 4\alpha = 0{,}379 - 0{,}119 \cos 2\omega - 0{,}291 \cos 4\omega + 0{,}023 \cos 6\omega$$
$$+ 0{,}008 \cos 8\omega,$$

$$r \cos f \sin 4\alpha = -0{,}099 \sin\omega + 0{,}106 \sin 3\omega + 0{,}104 \sin 5\omega - 0{,}012 \sin 7\omega$$
$$- 0{,}003 \sin 9\omega,$$

$$r \sin f \cos 4\alpha = -0{,}521 \sin\omega + 0{,}458 \sin 3\omega + 0{,}076 \sin 5\omega - 0{,}027 \sin 7\omega$$
$$- 0{,}001 \sin 9\omega.$$

36. En substituant tous ces résultats dans la formule du n° 29, on a finalement obtenu le développement de $\Delta^2$ suivant les sinus et cosinus des multiples de $c_1$ et des multiples de $\omega$

$$\Delta^2 = U_0 + U_1 \cos c_1 + U_2 \cos 2c_1 + U_3 \cos 3c_1 + U_4 \cos 4c_1$$
$$+ V_1 \sin c_1 + V_2 \sin 2c_1 + V_3 \sin 3c_1 + V_4 \sin 4c_1,$$

les quantités U et V ayant les valeurs suivantes :

$$U_0 = 1{,}5154025 - 0{,}0386103 \sin\omega - 0{,}432372 \cos 2\omega - 0{,}001406 \sin 3\omega$$
$$+ 0{,}043223 \cos 4\omega - 0{,}000028 \sin 5\omega + 0{,}002386 \cos 6\omega$$
$$- 0{,}000001 \cos 7\omega + 0{,}000074 \cos 8\omega + 0{,}000002 \cos 10\omega,$$

$$U_1 = -0{,}311223 + 1{,}548637 \sin\omega - 0{,}048616 \cos 2\omega - 0{,}037923 \sin 3\omega$$
$$- 0{,}046991 \cos 4\omega - 0{,}000123 \sin 5\omega + 0{,}000004 \cos 6\omega$$
$$+ 0{,}002002 \sin 7\omega + 0{,}000043 \cos 8\omega + 0{,}000046 \sin 9\omega$$
$$- 0{,}000013 \cos 10\omega,$$

$$V_1 = -0{,}439768 - 0{,}971178 \sin\omega - 0{,}065854 \cos 2\omega + 0{,}023390 \sin 3\omega$$
$$- 0{,}074130 \cos 4\omega - 0{,}000141 \sin 5\omega - 0{,}000015 \cos 6\omega$$
$$- 0{,}001049 \sin 7\omega + 0{,}000072 \cos 8\omega - 0{,}000029 \sin 9\omega$$
$$- 0{,}000020 \cos 10\omega,$$

$$\begin{aligned}U_2 = &-0{,}004811 + 0{,}008611 \sin\omega + 0{,}002148 \cos 2\omega + 0{,}000878 \sin 3\omega \\ &- 0{,}000574 \cos 4\omega - 0{,}000312 \sin 5\omega - 0{,}000042 \cos 6\omega \\ &+ 0{,}000032 \sin 7\omega + 0{,}000008 \cos 8\omega + 0{,}000003 \sin 9\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_2 = &-0{,}005825 - 0{,}007380 \sin\omega + 0{,}003473 \cos 2\omega - 0{,}000552 \sin 3\omega \\ &- 0{,}000901 \cos 4\omega + 0{,}000196 \sin 5\omega - 0{,}000067 \cos 6\omega \\ &- 0{,}000021 \sin 7\omega + 0{,}000013 \cos 8\omega - 0{,}000002 \sin 9\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_3 = &-0{,}000073 + 0{,}000018 \sin\omega + 0{,}000037 \cos 2\omega + 0{,}000039 \sin 3\omega \\ &- 0{,}000002 \cos 4\omega - 0{,}000008 \sin 5\omega - 0{,}000002 \cos 6\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_3 = &-0{,}000114 - 0{,}000010 \sin\omega + 0{,}000059 \cos 2\omega - 0{,}000025 \sin 3\omega \\ &- 0{,}000003 \cos 4\omega - 0{,}000004 \cos 6\omega,\end{aligned}$$

$$U_4 = -0{,}000001 - 0{,}000001 \sin\omega + 0{,}000001 \sin 3\omega,$$

$$V_4 = -0{,}000001.$$

37. Les premiers termes de la formule précédente sont

$$\begin{aligned}&1{,}5154025 - 0{,}4323720 \cos 2\omega, \\ &- \sin c_1 [0{,}439768 + 0{,}971178 \sin\omega], \\ &- \cos c_1 [0{,}311223 - 1{,}5486368 \sin\omega].\end{aligned}$$

A la simple inspection de ces termes, on voit que la méthode de M. Gylden ne peut être appliquée : il faut diviser l'orbite en plus de deux parties.

On peut placer un point de division au périhélie en posant

$$\sin\omega = +\sin^2\frac{\omega_1}{2} = \frac{1 - \cos\omega_1}{2},$$

$$\sin\omega = -\sin^2\frac{\omega_2}{2} = -\frac{1 - \cos\omega_2}{2}.$$

En adoptant la première substitution et faisant varier $\omega_1$ de zéro à $\pi$, on aura la partie de l'orbite comprise entre le périhélie et le point $(u_1, r_1)$. La seconde substitution se rapporte à la partie symétrique par rapport

au grand axe. Appliquant la première substitution, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta^2 = {} & 1{,}4072095 - 0{,}925357 \sin c_1 + 0{,}463095 \cos c_1 \\ & - 0{,}432372 \cos\omega_1 + 0{,}485589 \cos\omega_1 \sin c_1 - 0{,}7743184 \cos\omega_1 \cos c_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

La possibilité d'appliquer la méthode de M. Gylden commence à apparaître; en toute rigueur, on pourrait le faire; les termes indépendants de $\omega_1$ sont les plus grands. Néanmoins, il paraît convenable de diviser encore cette partie de l'orbite. On peut le faire en posant, pour la partie la plus voisine du périhélie,

$$\cos\omega_1 = \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega'_1 = \frac{1 + \cos\omega'_1}{2},$$

et, pour l'autre partie,

$$\cos\omega_1 = -\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega''_1 = -\frac{1 + \cos\omega''_1}{2},$$

$\omega''_1$ variant de $-\pi$ à zéro et $\omega'_1$ de zéro à $\pi$.

Si l'on adopte la dernière formule, les termes donnés précédemment deviennent

$$\begin{aligned}& 1{,}623395 - 1{,}168151 \sin c_1 + 0{,}850254 \cos c_1 \\ & \quad + 0{,}216186 \cos\omega''_1 - 0{,}242794 \sin c_1 \cos\omega''_1 + 0{,}387159 \cos c_1 \cos\omega''_1.\end{aligned}$$

L'argument $\omega''_1$ se rapporte à la partie de l'orbite la plus voisine de l'orbite de la Terre, et, par suite, à celle où les perturbations seront les plus grandes. Il est visible que toute la difficulté de développement des puissances négatives de $\Delta$ résidera dans celui des puissances du polynôme.

$$1{,}623395 - 1{,}168151 \sin c_1 + 0{,}850254 \cos c_1.$$

L'introduction de l'argument elliptique, d'après les indications données au n° 20, rendra ce développement très-facile.

**38.** Hansen, dans le Mémoire cité sur le calcul des perturbations des comètes, dit que le développement général de $\Delta^{-3}$, dans le cas particulier que nous avons traité, serait impraticable. Aussi a-t-il dû donner

à la variable $\omega$ des valeurs particulières, développer les puissances de $\Delta^{-3}$ pour toutes ces valeurs particulières suivant les sinus et cosinus des multiples de $c_1$ et, par des quadratures, reconstituer, au moyen de ces développements particuliers, le développement général procédant à la fois suivant les sinus et les cosinus des multiples des deux arguments. Comme on l'a vu au dernier paragraphe, la méthode de M. Gylden ne s'applique pas à la portion d'orbite que Hansen avait embrassée dans son calcul; il faut la subdiviser en plusieurs parties. Malgré la longueur des calculs résultant de cette subdivision, il semble que les idées de M. Gylden aient un avantage considérable. La marche à suivre est à la fois très-claire et très-simple; les diverses portions de l'orbite peuvent être calculées séparément par plusieurs personnes, tandis que la méthode de quadrature employée par Hansen, méthode extrêmement longue d'ailleurs, n'a aucun de ces avantages.

# DÉTERMINATION

DU

# NOMBRE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

## DE PREMIÈRE ESPÈCE,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DE NANCY.

## INTRODUCTION.

1. Étant donnée une équation irréductible de degré $m$,

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

on appelle *intégrales abéliennes* les intégrales

$$\int \psi(x, y)\, dx, \tag{2}$$

où $\psi(x, y)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de $x$ et de $y$.

Abel en a fait le premier l'étude et en a donné une propriété importante dans son Mémoire célèbre : *Recherches sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes*. Riemann a ramené ces intégrales à trois formes simples qui constituent les intégrales abéliennes des trois espèces. Mais, sans entrer dans le détail de cette réduction, qui est étrangère à notre sujet, il suffira de rappeler que l'intégrale de première espèce est

$$\int \frac{N(x, y)\, dx}{F'_y(x, y)}, \tag{3}$$

où $N(x, y)$ désigne un polynôme du degré $m - 3$, dont on a déterminé

les coefficients supposés d'abord arbitraires, de façon que l'intégrale reste finie pour toutes les valeurs de $x$ finies ou infinies.

En supposant que la courbe représentée par l'équation (1) ne possède pas d'autres points singuliers que des points doubles et de rebroussement, MM. Clebsch et Gordan ont trouvé que le nombre des intégrales de première espèce est

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - d - r,$$

$d$ désignant le nombre des points doubles, $r$ celui des points de rebroussement, et ils ont reconnu que le nombre des périodes de l'intégrale est $2p$.

Dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 170, MM. Briot et Bouquet ont donné une formule qui représente dans tous les cas le nombre des périodes des intégrales abéliennes. Je me suis proposé de déterminer, dans le cas général, le nombre des intégrales de première espèce et de faire voir qu'il est égal à la moitié de celui des périodes.

Les formules dont je me sers s'accordent avec la relation donnée par M. Halphen (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1874). J'y arrive par une méthode différente.

Comme application, je donne le caractère que doit présenter l'équation (1) pour que l'intégrale (2) s'exprime : 1° par des fonctions algébriques et logarithmiques ; 2° par ces mêmes fonctions et les intégrales elliptiques des trois espèces. Clebsch a traité l'hypothèse particulière où la courbe (1) n'admet pas d'autres points singuliers que des points doubles et de rebroussement, et a fait voir que le nombre de ceux-ci devait être $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ dans le premier cas et $\frac{1}{2}m(m-3)$ dans le second.

# PREMIÈRE PARTIE.

## I.

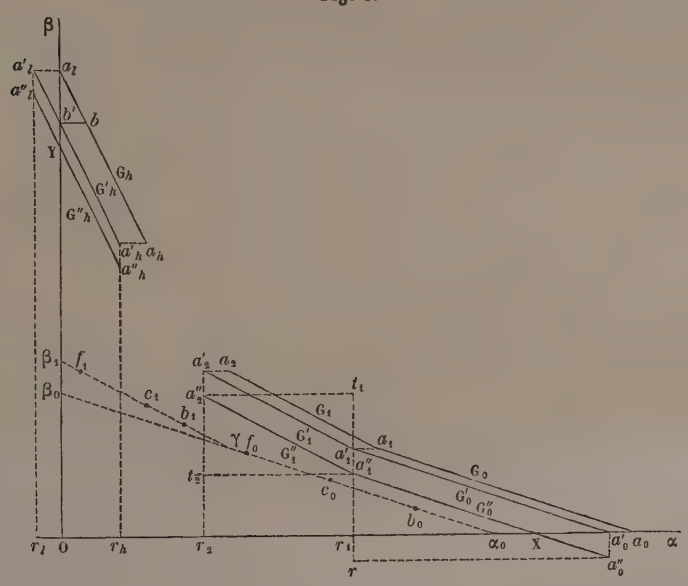
2. Supposons qu'on ait effectué dans l'équation $F(x, y) = 0$ une substitution du premier degré, de manière que les $m$ valeurs de $y$

restent finies pour toutes les valeurs finies de $x$ et que l'intégrale conserve une valeur finie pour les valeurs infinies de $x$. Il suffira de considérer les différents points critiques à distance finie, c'est-à-dire ceux dont les coordonnées vérifient les deux équations

$$F(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad F'_y(x, y) = 0.$$

Soient $a$, $a_1$, $a_2$,... ces points. Transportons l'origine des coordonnées en l'un d'eux, $a$. L'intégrale (3) conservera la même forme, et nous supposerons que $x$ et $y$ désignent les nouvelles variables. On sait déterminer le nombre des racines infiniment petites et le degré en $x$ de chacune d'elles par le procédé dû à M. Puiseux. La méthode consiste à chercher les termes du degré le moins élevé de l'équation (1), en regardant $x$ comme du premier ordre et $y$ comme un infiniment petit d'un ordre convenable $\mu$. Pour cela, dans un terme quelconque, $Ay^\alpha x^\beta$, on regarde $\alpha$ comme une abscisse, $\beta$ comme une ordonnée, et l'on construit les points qui répondent aux différents termes. Le degré

Fig. 1.




du terme $Ay^\alpha x^\beta$ est $\mu\alpha + \beta$. En le désignant par D, la relation $\mu\alpha + \beta = D$ montre que les termes du même degré correspondent à

des points rangés sur une droite dont le coefficient angulaire changé de signe marquera le degré de $y$ en $x$, et dont l'ordonnée à l'origine indiquera le degré total du terme.

On sait alors que, pour avoir les termes de moindre degré, il faut prendre les points situés sur l'un des côtés d'un polygone $a_0 a_1 \ldots a_l$ (*fig.* 1) convexe vers l'origine, et composé d'un certain nombre de côtés répondant aux groupes suivants, ordonnés suivant les puissances décroissantes de $y$ :

$$\begin{aligned}
G_0 &= A_{n_0} y^n \qquad + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_1\beta_1} y^{\alpha_1} x^{\beta_1},\\
G_1 &= A_{\alpha_1\beta_1} y^{\alpha_1} x^{\beta_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_2\beta_2} y^{\alpha_2} x^{\beta_2},\\
G_2 &= A_{\alpha_2\beta_2} y^{\alpha_2} x^{\beta_2} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_3\beta_3} y^{\alpha_3} x^{\beta_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G_{h-1} &= A_{\alpha_{h-1}\beta_{h-1}} y^{\alpha_{h-1}} x^{\beta_{h-1}} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{\alpha_h\beta_h} y^{\alpha_h} x^{\beta_h},\\
G_h &= A_{\alpha_h\beta_h} \quad y^{\alpha_h} \quad x^{\beta_h} \quad + \Sigma A_{\alpha\beta}\, y^\alpha x^\beta + A_{0l}\, x^l;
\end{aligned}$$

$n$ est le nombre des valeurs infiniment petites de $y$ et $A_{\alpha\beta} y^\alpha x^\beta$ désigne un terme intermédiaire d'un groupe quelconque [1].

Prenons par exemple le second côté. Les termes de $G_1$ seront du même degré, si l'on a

$$\alpha_1 \mu + \beta_1 = \alpha\mu + \beta = \alpha_2 \mu + \beta_2, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{q_1}{p_1},$$

les nombres entiers $q_1$ et $p_1$ étant supposés premiers entre eux. On en conclut

$$\begin{aligned}
\beta_2 - \beta_1 &= k_1 q_1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = k_1 p_1,\\
\beta - \beta_1 &= k q_1, \quad \alpha_1 - \alpha = k p_1;
\end{aligned}$$

en sorte que, si l'on pose $y = v x^\mu$, le groupe $G_1$ deviendra

$$\begin{aligned}
G_1 &= x^{\alpha_1 \mu + \beta_1} v^{\alpha_2} \left[ A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1 - \alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha - \alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2} \right]\\
&= x^{\alpha_1 \mu + \beta_1} v^{\alpha_2} \left[ A_{\alpha_1\beta_1} v^{k_1 p_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{(k_1 - k) p_1} + A_{\alpha_2\beta_2} \right].
\end{aligned}$$

Posons

$$v^{p_1} = \lambda \quad \text{et} \quad A_{\alpha_1\beta_1} \lambda^{k_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, \lambda^{k_1 - k} + A_{\alpha_2\beta_2} = L_1.$$

Si $\lambda$ est une racine de l'équation $L_1 = 0$ et si $v_1$ désigne une racine

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 42.

de l'équation $v^{p_1} = \lambda$, on sait que $v_1 x^{\frac{q_1}{p_1}}$ sera la valeur approchée de $p_1$ racines infiniment petites. Je supposerai d'abord que l'équation $L_1 = 0$ et toutes les autres analogues n'aient pas de racines multiples.

3. Supposons que dans la dérivée $F'_y(x, y)$ on veuille trouver les termes de moindre degré. Ayant construit le polygone élémentaire $a_0 a_1 \ldots a_l$ de la fonction $F(x, y)$, il est clair que les sommets du polygone élémentaire de la dérivée s'obtiendront en reculant les sommets du premier polygone d'une unité vers les $\alpha$ négatifs; les côtés des deux polygones seront parallèles. Soit $a'_0 a'_1 a'_2 \ldots$ ce polygone que nous appellerons *dérivé*. Il y a toutefois exception pour le dernier côté. S'il y a dans le groupe $G_h$ un terme contenant $y$ à la première puissance et répondant à un point $b$, la dérivée de ce terme par rapport à $y$ en donnera un autre ne contenant plus que $x$, et le polygone dérivé se terminera en $b'$ sur l'axe $o\beta$; il aura alors le même nombre de côtés que le premier. Dans le cas contraire, le polygone dérivé aura ses côtés $G'_0, G'_1, \ldots, G'_{h-1}$ parallèles aux côtés $G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}$; mais, à partir du sommet $a'_h$, il pourra présenter un nombre quelconque de côtés. Il suffit, pour notre objet, de remarquer que les coefficients angulaires de ces côtés auront des valeurs absolues égales ou supérieures à celle du côté $G_h$, en sorte qu'il n'y aura aucun point situé au-dessous de la parallèle à ce côté $G_h$ menée par le point $a'_h$.

Imaginons qu'on abaisse d'une unité les sommets $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots$ du polygone dérivé. On obtiendra ainsi un nouveau polygone $a''_0 a''_1 a''_2 \ldots$ dont les côtés $G''_0, G''_1, G''_2, \ldots$ seront parallèles à ceux des précédents; mais les ordonnées à l'origine des nouveaux côtés seront respectivement inférieures d'une unité à celles des côtés correspondants du polygone dérivé. Observons qu'à partir du point $a''_h$ nous ne nous occuperons plus des côtés que peut présenter le polygone élémentaire de la dérivée, et nous mènerons simplement par ce point une parallèle au côté $G_h$. Enfin nous supposerons le nouveau polygone terminé à l'axe des $\alpha$ et à l'axe des $\beta$ en X et Y, un point tel que $a''_0$ étant fictif, c'est-à-dire ne correspondant à aucun terme et servant seulement à régulariser la construction des côtés.

Si l'on représente avec la convention déjà indiquée les termes de la

fonction arbitraire $N(x, y)$, je dis que l'intégrale (3) ne pourra rester finie pour les valeurs infiniment petites de $x$ que si l'on égale à zéro les coefficients des termes qui répondent à des points situés au-dessous du dernier polygone ou sur ses côtés.

Considérons une racine appartenant au groupe $G_1$ et d'ordre $\mu = \frac{q_1}{p_1}$. Les termes de moindre degré de la dérivée proviennent évidemment du groupe $G'_1$. Quant à la fonction $N(x, y)$, pour obtenir les termes de moindre degré, il faudra faire mouvoir une parallèle au côté $G_1$, en la faisant partir de l'origine, jusqu'à ce qu'elle contienne un ou plusieurs points appartenant à cette fonction. Soit $\Gamma_1$ la position qu'elle aura à ce moment. Tous les termes correspondants auront le même degré égal à l'ordonnée à l'origine de la ligne $\Gamma_1$. Si cette dernière est au-dessous du côté $G''_1$ ou coïncide avec lui, les termes dont on vient de parler devront donner un résultat nul. Autrement, le degré de $N(x, y)$ serait inférieur d'une unité au moins à celui de $F'_y(x, y)$, et l'intégrale (3) serait infinie.

Je dis, d'après cela, que la distance des deux points extrêmes qui se trouvent sur $\Gamma_1$ ne peut être moindre que la longueur du côté $G_1$. Soit $B_0 y^\alpha x^\beta$ le terme qui répond à l'extrémité de $\Gamma_1$ la plus éloignée de l'axe $o\beta$, et concevons les différentes parallèles à l'axe $o\beta$ distantes de l'unité. Quand on remonte le côté $\Gamma_1$ dont le coefficient angulaire est $-\frac{q_1}{p_1}$, il faut s'élever de $\frac{q_1}{p_1}$ pour rencontrer la parallèle qui suit celle du terme initial, de $\frac{2q_1}{p_1}$ pour rencontrer la suivante, etc.... Puisque $q_1$ et $p_1$ sont premiers entre eux, il faudra évidemment traverser $p_1$ de ces parallèles pour arriver à un point du réseau. Le chemin parcouru aura pour projection $p_1$ sur l'axe $o\alpha$ dans le sens négatif et $q_1$ sur l'axe $o\beta$, en sorte que le second terme sera $B_1 y^{\alpha-p_1} x^{\beta+q_1}$, où $B_1$ peut être nul. Le troisième terme sera de même $B_2 y^{\alpha-2p_1} x^{\beta+2q_1}$,.... La projection sur $o\alpha$ du côté $G_1$ est $\alpha_1 - \alpha_2 = k_1 p_1$. Si donc la distance des deux points extrêmes sur $\Gamma_1$ est moindre que le côté $G_1$, le dernier terme que l'on rencontrera sera $B_{k_1-i} y^{\alpha-(k_1-i)p_1} x^{\beta+(k_1-i)q_1}$. Tous ces termes, étant du même degré en $x$ après la substitution $y = v x^{\frac{q_1}{p_1}}$, deviennent

$$x^{\alpha\frac{q_1}{p_1}+\beta} v^{\alpha-(k_1-i)p_1} \left(B_0 v^{(k_1-i)p_1} + B_1 v^{(k_1-i-1)p_1} + \ldots + B_{k_1-i}\right).$$

Le polynôme

$$\varphi(v) = B_0\lambda^{k_1-i} + B_1\lambda^{k_1-i-1} + \ldots + B_{k_1-i} = A$$

du degré $k_1 - i$ doit s'annuler pour les $k_1$ racines supposées inégales de l'équation $L_1 = 0$, en sorte que tous les coefficients de A devraient être nuls.

Concevons maintenant l'ensemble des points qui répondent à la fonction $N(x, y)$. Prenons une parallèle au côté $G_0$ passant par l'origine et faisons-la mouvoir parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rencontre des points $b_0, c_0, \ldots, f_0$. Arrêtons-la dans cette position et supposons qu'elle ne soit pas située au-dessus de $G''_0$. Le dernier point qu'on trouvera sur la gauche de cette ligne ne pourra être situé en $\beta_0$ sur l'axe $o\beta$. Car alors, menant par $\beta_0$ une parallèle au côté $G_1$, il n'y aurait qu'un seul point sur cette parallèle, ce qui est impossible. Observons de plus que le dernier point $f_0$ devra être à une distance de $o\alpha$ au moins égale à celle du sommet $a_1$; autrement, la distance $\alpha_0 f_0$ serait moindre que la longueur $G_0$. Faisons maintenant mouvoir une parallèle au côté $G_1$, en partant de l'origine jusqu'à ce qu'elle contienne des points appartenant à $N(x, y)$. Elle en contiendra nécessairement plusieurs, et dans cette position viendra couper la ligne $\alpha_0 f_0$ à gauche de $f_0$ en $\gamma$, ou en $f_0$, puisque $f_0$ est un des points du système. Il en résulte que la nouvelle droite ne sera pas au-dessus de $G''_1$. Elle contiendra les points $b_1, c_1, \ldots, f_1$, dont le dernier ne pourra être en $\beta_1$ sur l'axe $o\beta$ pour la même raison que précédemment. Le dernier point $f_1$ devra être à une distance de $o\alpha$ au moins égale à celle du sommet $a_2$; autrement, la distance $\gamma f_1$ serait inférieure à la longueur du côté $G_1$. En continuant ainsi, on sera amené à tracer une parallèle au dernier côté $G_h$. Mais, le polygone obtenu étant évidemment de périmètre moindre que le polygone élémentaire de la fonction donnée, le dernier côté serait nécessairement plus petit que $G_h$, ce qui est impossible.

Il peut se faire que la parallèle au côté $G_0$ soit au-dessus de $G''_0$; alors il n'y aurait aucun point sur le côté $G''_0$ prolongé ni au-dessous. Il suffira de mener une parallèle au côté $G_1$ et de répéter le raisonnement précédent. Si cette seconde parallèle se trouvait aussi au-dessus de $G''_1$, c'est qu'il n'y aurait aucun point sur les côtés $G''_0$ et $G''_1$ prolongés ni au-

dessous de ces lignes. On commencerait alors par mener une parallèle au côté $G_2$, et ainsi de suite. Il est donc nécessaire qu'il n'y ait plus aucun point sur les côtés $G''_0, G''_1, \ldots, G''_h$, ni au-dessous, c'est-à-dire à l'intérieur du polygone $oXa''_1 a''_2 \ldots Yo$ ou sur ses côtés.

Ces conditions sont suffisantes lorsque le degré de $F'_y(x, y)$ pour la racine considérée est bien égal à l'ordonnée à l'origine de la droite $G'_1$. Comme on a

$$\begin{aligned} G'_1 &= \alpha_1 A_{\alpha_1\beta_1} y^{\alpha_1-1} x^{\beta_1} + \Sigma \alpha A_{\alpha\beta} y^{\alpha-1} x^{\beta} + \alpha_2 A_{\alpha_2\beta_2} y^{\alpha_2-1} x^{\beta_2} \\ &= x^{(\alpha_1-1)\frac{q_1}{p_1}+\beta_1} \left(\alpha_1 A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1-1} + \Sigma \alpha A_{\alpha\beta} v^{\alpha-1} + \alpha_2 A_{\alpha_2\beta_2} v^{\alpha_2-1}\right) \\ &= x^{(\alpha_1-1)\frac{q_1}{p_1}+\beta_1} \frac{d(v^{\alpha_1} L_1)}{dv}, \end{aligned}$$

si l'on remplace $v$ par sa valeur approchée $v_1$, le résultat obtenu sera différent de zéro, puisque $\lambda$ est une racine simple de l'équation $L_1 = 0$.

4. Pour avoir le nombre de conditions imposées à la fonction $N(x, y)$, il faut, d'après ce qui précède, trouver le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du polygone $oXa''_1 a''_2 \ldots Yo$ ou sur ses côtés. Nous chercherons d'abord le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du trapèze $r_1 r_2 a''_1 a''_2$, ou sur ses côtés. La dimension $r_1 r_2$ est égale à $\alpha_1 - \alpha_2$; en sorte que, en comptant $r_1$ et $r_2$, il y a sur cette ligne $\alpha_1 - \alpha_2 + 1$ points. La dimension $a''_1 r_1$ est égale à $\beta_1 - 1$, et il y a $\beta_1$ points sur cette ligne. Le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du rectangle $r_1 r_2 a''_1 t_2$ et sur ses côtés, en ne comptant pas ceux qui sont sur le côté supérieur, sera $(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_1 - 1)$. Passons au triangle $a''_1 t_2 a''_2$, dont les côtés ont pour dimensions $\alpha_1 - \alpha_2 = k_1 p_1$ et $\beta_2 - \beta_1 = k_1 q_1$. Il y a, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent, $k_1 + 1$ points sur le côté $a''_1 a''_2$, en comptant les deux extrémités. Achevons le rectangle $a''_1 t_2 a''_2 t_1$. Il comprendra en tout $(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1)$ points tant à l'intérieur que sur les côtés. Si nous retranchons $k_1 + 1$ et si nous divisons le résultat par 2, nous aurons évidemment le nombre des points qui se trouvent sur les côtés du triangle $a''_1 t_2 a''_2$ et à son intérieur, à l'exception de ceux qui se trouvent sur $a''_1 a''_2$; ce sera

$$\tfrac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1) - (k_1 + 1)].$$

Mais, comme ces derniers points répondent à des termes qui doivent

eux-mêmes disparaître, il faudra ajouter $k_1 + 1$ à l'expression précédente, qui deviendra

$$\tfrac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1) + k_1 + 1];$$

tel est le nombre des points situés sur les côtés du triangle et à son intérieur.

Le nombre des points qui se trouvent à l'intérieur du trapèze $r_1 r_2 a''_1 a''_2$ et sur ses côtés sera donc

$$\tfrac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_2 - \beta_1 + 1) + k_1 + 1] + (\alpha_1 - \alpha_2 + 1)(\beta_1 - 1).$$

La même évaluation se fera pour les autres trapèzes. Mais afin de ne pas répéter les points qui se trouvent sur des côtés communs à deux trapèzes successifs, nous aurons soin de ne prendre dans chacun d'eux que les points situés sur le côté de droite, ceux qui sont situés sur le côté de gauche devant être comptés dans le trapèze suivant. Nous retrancherons donc $\beta_2$ de l'expression précédente, ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \beta_1 - \beta_2 - \alpha_1 + \alpha_2 + k_1).$$

Le nombre des points situés à l'intérieur du dernier trapèze $or_h a''_h Y$ et sur ses côtés résultera sans difficulté de la formule précédente, puisque celle-ci s'applique au trapèze $r_h a''_h r_l a''_l$, dont on supprime les points situés sur le côté de gauche $r_l a''_l$. Il faudra seulement se rappeler que $\beta_{h+1}$ doit être remplacé par $l$, et $\alpha_{h+1}$ par zéro ; on aura ainsi

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_h\beta_h + \alpha_h l + \beta_h - l - \alpha_h + k_h).$$

Quant au triangle $r_1 a''_1 X$, on remarquera que le nombre des points situés à l'intérieur du triangle $a''_0 r a''_1$ et sur ses côtés est, d'après ce qui précède,

$$\tfrac{1}{2}[(n - \alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) + k_0 + 1];$$

il faudra en retrancher d'abord $n - \alpha_1 + 1$, qui est le nombre des points situés sur le côté $ra''_0$, puis $\beta_1$, qui est le nombre des points situés sur le côté $r_1 a''_0$, ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}[(n - \alpha_1 + 1)(\beta_1 + 1) + k_0 + 1] - \beta_1 - [n - \alpha_1 + 1],$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}[(n - \alpha_1 + 1)(\beta_1 - 1) - 2\beta_1 + k_0 + 1],$$

ou enfin

$$\tfrac{1}{2}(n\beta_1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1 - n + \alpha_1 + k_0).$$

Le nombre des termes à faire disparaître sera donc

$$A_a = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{llllllll}
 & -\alpha_1\beta_1 + n\beta_1 & & & -\beta_1 - n & +\alpha_1 + k_0, \\
+\alpha_1\beta_1 & -\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_2 & -\alpha_2\beta_1 & +\beta_1 & -\beta_2 - \alpha_1 & +\alpha_2 + k_1, \\
+\alpha_2\beta_2 & -\alpha_3\beta_3 + \alpha_2\beta_3 & -\alpha_3\beta_2 & +\beta_2 & -\beta_3 - \alpha_2 & +\alpha_3 + k_2, \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, \\
+\alpha_{h-1}\beta_{h-1} & -\alpha_h\beta_h + \alpha_{h-1}\beta_h & -\alpha_h\beta_{h-1} & +\beta_{h-1} & -\beta_h - \alpha_{h-1} & +\alpha_h + k_{h-1}, \\
+\alpha_h\beta_h & +\alpha_h l & & +\beta_h & -l - \alpha_h & +k_h,
\end{array}\right.$$

ou bien, en réduisant,

$$\begin{aligned}
2A_a = {} & n\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \dots \\
& + (\alpha_{h-1}\beta_h - \alpha_h\beta_{h-1}) + \alpha_h l - n - l + k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_{h-1} + k_h.
\end{aligned}$$

Si l'on convient de remplacer $\beta_0$ par o et $\alpha_0$ par $n$, $\beta_{h+1}$ par $l$ et $\alpha_{h+1}$ par o, on pourra écrire

$$(4) \qquad 2A_a = \sum_{i=0}^{i=h} (\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i + k_i) - [n + l].$$

5. Il sera utile pour la suite de chercher les termes du degré le moins élevé de la fonction $N(x, y)$, quand on l'aura assujettie aux $A_a$ conditions précédentes. Supposons qu'on descende le côté $a''_2 a''_1$, jusqu'à ce qu'on rencontre la $i^{\text{ième}}$ ligne verticale à partir de celle du point $a''_2$; on se sera abaissé de $i\frac{q_1}{p_1}$; si $r_1$ est le reste de la division de $iq_1$ par $p_1$, le point le moins élevé répondant à un terme de $N(x, y)$ qu'on rencontrera sur la $i^{\text{ième}}$ ligne verticale sera au-dessus de $G''_1$ de $\frac{r_1}{p_1}$. Comme $p_1$ et $q_1$ sont premiers entre eux, si l'on fait varier $i$ de 1 à $p_1 - 1$, on trouvera, dans un certain ordre, les restes $1.2\dots(p_1 - 1)$. Le point qu'on trouvera sur la $p_1^{\text{ième}}$ ligne sera de une unité au-dessus de $G''_1$. En faisant varier $i$ de $p_1 + 1$ à $2p_1 - 1$, on retrouvera dans le même ordre les restes $1.2\dots(p_1 - 1)$; de même en faisant varier $i$ entre $2p_1 + 1$ et $3p_1 - 1\dots$, et enfin en faisant varier $i$ de $(k_1 - 1)p_1 + 1$ à $k_1 p_1 - 1$.

De là résulte que, si dans $N(x, y)$ on remplace $y$ par $\varphi_1 x^{\frac{q_1}{p_1}}$, les termes du degré le moins élevé répondront à une droite parallèle à $G''_1$ et dont l'ordonnée à l'origine surpassera celle de $G''_1$ de $\frac{1}{p_1}$. Puis les

termes qui ont après les précédents le moindre degré répondront à une autre parallèle, dont l'ordonnée à l'origine surpassera celle de $G''_1$ de $\frac{2}{p_1}$, ... Sur chacune de ces lignes il y aura au moins $k_1$ points séparés les uns des autres par des distances constantes ayant pour projection sur $o\alpha$ la longueur $p_1$. Si l'on considère les points de $N(x, y)$ qui sont en dehors des parallèles $r_1 a''_1$ et $r_2 a''_2$ prolongées, il pourra y avoir sur chacune des parallèles à $G''_1$ plus de $k_1$ points.

Si $p_1$ est égal à l'unité, les parallèles au côté $G''_1$ rencontrent toutes les lignes verticales en des points du réseau sans jamais passer entre deux d'entre eux. Les ordonnées à l'origine de ces parallèles varient chaque fois d'une unité et les termes du moindre degré de $N(x, y)$ correspondent alors à des points situés sur le côté $G'_1$ du polygone dérivé.

Il faut encore ajouter que, s'il s'agit des côtés extrêmes $G_0$ ou $G_h$, on ne pourra plus affirmer sur ces parallèles que l'existence de $k-1$ points. Prenant, par exemple, $G''_0$, on remarquera que la portion $a''_0 X$ qui manque pour notre raisonnement est moindre que la $k_0^{ième}$ partie de $G_0$, puisque le côté tout entier a pour projection $k_0 q_0$ sur $o\beta$ et que la partie qui manque a pour projection l'unité. Pour le côté $G''_h$, la portion $a''_l Y$ qui manque a pour projection l'unité sur $o\alpha$, le côté tout entier ayant pour projection $k_h p_h$.

Remarquons encore que, si l'on désigne par U l'inverse du coefficient de $dx$ dans l'intégrale (3), c'est-à-dire

$$U = \frac{F'_y(x, y)}{N(x, y)},$$

U sera pour une racine $y$ de l'ordre $\frac{q}{p}$ un infiniment petit du degré $1 - \frac{1}{p}$. Si $p = 1$, U aura une valeur finie différente de zéro : cela résulte immédiatement de ce qui précède.

## II.

6. Supposons qu'une des équations $L_0 = 0$, $L_1 = 0$, ..., $L_h = 0$, que j'appelle $L = 0$, ait une racine multiple d'ordre $n'$, et soit $\frac{q}{p}$

le degré des valeurs de $y$ correspondantes. Posons

$$x = x'^p, \quad \text{d'où} \quad dx = p x'^{p-1} dx',$$

l'intégrale (3) deviendra

$$p \int \frac{N(x'^p, y)\, x'^{p-1}\, dx'}{F'_y(x'^p, y)}.$$

Posons

$$y = v x'^q$$

et soit

$$F(x, y) = x'^{\alpha q + \beta p}\, \mathcal{F}^{(1)}(x', v),$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant les exposants de $y$ et de $x$ dans le premier terme du groupe G. On en conclut

$$\frac{dF}{dv} = \frac{dF}{dy} x'^q = x'^{\alpha q + \beta p} \frac{d.\mathcal{F}^{(1)}(x', v)}{dv}$$

et, par suite,

$$\frac{dF}{dy} = x'^{(\alpha-1)q + \beta p} \frac{d.\mathcal{F}^{(1)}(x', v)}{dv}.$$

Si dans la fonction $N(x, y)$, on a fait disparaître tous les termes qui répondent à des points situés au-dessous du côté G″ et sur ce côté, tous les termes qui restent seront, après la substitution $y = v x'^q$, divisibles par $x'^{(\alpha-1)q + (\beta-1)p + 1}$, comme cela résulte du numéro précédent, et l'on aura

$$N(x, y) = x'^{(\alpha-1)q + (\beta-1)p + 1}\, \mathcal{N}^{(1)}(x', v),$$

en sorte que l'intégrale (3) deviendra

$$(5) \qquad p \int \frac{\mathcal{N}^{(1)}(x', v)\, dx'}{\mathcal{F}^{(1)\prime}_v(x', v)}.$$

Mais il est nécessaire de démontrer que les conditions imposées à la fonction $N(x, y)$, quand les racines de l'équation $L = 0$ sont inégales, doivent être encore remplies dans le cas actuel.

Supposons, en effet, qu'il reste des termes de $N(x, y)$ au-dessous de G″ ou sur ce côté. Soit $\Gamma$ la première rangée de points qu'on rencontre en partant de l'origine sur une même parallèle au côté G. Tout consiste à prouver que la distance des deux points extrêmes qui se trouvent sur $\Gamma$ doit être au moins égale au côté G. Pour cela je vais montrer que

l'équation $\Lambda = 0$ du n° 3 a une racine multiple d'ordre $n'$ égale à celle de l'équation $L = 0$. Il en résultera que le polynôme $\Lambda$ doit être encore identiquement nul.

Remarquons que le côté $\Gamma$ ayant une ordonnée à l'origine au plus égale à celle de $G''$, les termes correspondants de $N(x, y)$, après la substitution $y = vx'^q$, seront divisibles par une commune puissance de $x'$ au plus égale à $(\alpha - 1)q + (\beta - 1)p$, et l'intégrale (3) deviendra

$$p \int \frac{\mathfrak{N}(x', v)\, dx'}{x'^h \mathfrak{F}_v^{(1)\prime}(x', v)},$$

où $h$ sera au moins égale à l'unité.

Soit $v_1$ la valeur approchée de $v$, et posons $v = v_1 + w$. Il faudra, pour que l'intégrale reste finie, que le degré de $\mathfrak{N}(x', v_1 + w)$ soit supérieur à celui de $\mathfrak{F}_w^{(1)\prime}(x', v_1 + w)$. Pour avoir les valeurs de $w$ en $x'$, on appliquera à la fonction $\mathfrak{F}^{(1)}(x', v_1 + w) = F^{(1)}(x', w)$ la méthode de M. Puiseux. Admettons que les équations $L^{(1)} = 0$ relatives au nouveau polygone qu'on aura à construire n'aient pas de racines multiples. On verra alors, en répétant le raisonnement du n° 3, qu'il faut égaler à zéro les coefficients des termes répondant à des points situés au-dessous du nouveau polygone dérivé et sur ses côtés. Or, parmi les conditions qui en résultent, examinons en particulier celles qui proviennent des termes indépendants de $x'$ dans la fonction $\mathfrak{N}(x', v)$ et, par suite, des termes répondant à $\Gamma$ pour la fonction $N(x, y)$. On a vu, n° 3, que la substitution $y = vx'^q$ dans ces termes donne

$$x'^{\alpha q + \beta p} v^{\alpha - (k-i)p} \varphi(v);$$

les termes de $\mathfrak{N}(x', v)$ indépendants de $x'$ sont donc

$$v^{\alpha - (k-i)p} \varphi(v).$$

En remplaçant $v$ par $v_1 + w$, le terme constant et les coefficients de $w, w^2, \ldots, w^{n'-1}$ doivent être nuls. On pourra faire abstraction du premier facteur et considérer seulement la fonction $\varphi(v_1 + w)$, ce qui, d'après le développement de Taylor, donnera les conditions

$$\varphi(v_1) = 0 \quad \frac{d\varphi(v_1)}{dv_1} = 0 \ldots \frac{d^{n'-1}\varphi(v_1)}{dv_1^{n'-1}} = 0.$$

Cela revient évidemment à dire que, pour la racine d'ordre $n'$ de $L = 0$, la fonction $\Lambda$ et ses $n' - 1$ premières dérivées doivent s'annuler, ce qui démontre notre proposition.

7. Pour avoir le nombre des conditions relatives au point critique $a$, il faudra donc écrire d'abord un nombre de conditions que j'appelle maintenant [A] et qui sera donné par la formule (4). Puis il faudra ajouter à celles-ci les conditions qui expriment que l'intégrale (5) reste finie, quand, ayant remplacé $v$ par $v_1 + w$, on considère les valeurs infiniment petites de $w$ qui satisfont à l'équation $F^{(1)}(x', w) = 0$.

Pour cela on posera $w = v' x'^{\mu}$. Le degré $\mu = \frac{q}{p'}$ de chaque racine infiniment petite $w$ sera donné par la construction d'un polygone analogue au premier, et les valeurs approchées de $v'^{p'}$ satisferont à des équations telles que $L^{(1)} = 0$, dont on peut supposer d'abord toutes les racines inégales.

Puisque

$$\mathcal{F}^{(1)}(x', v_1 + w) = F^{(1)}(x', w),$$

on aura

$$\mathcal{F}_w^{(1)\prime}(x', v_1 + w) = F_w^{(1)\prime}(x', w).$$

Soit aussi

$$\mathcal{N}^{(1)}(x', v_1 + w) = N^{(1)}(x', w),$$

l'intégrale deviendra

$$p \int \frac{N^{(1)}(x', w)\, dx'}{F_w^{(1)\prime}(x', w)}.$$

Le nombre des conditions nouvelles que j'appelle $[A]^{(1)}$ s'exprimera par la formule (4), où l'on devra remplacer $n$ par $n'$, et les quantités $\alpha$, $\beta$, $k$, $l$, par les nouvelles valeurs $\alpha'$, $\beta'$, $k'$, $l'$.

8. Il est bon de faire voir comment est composée la fonction $\mathcal{N}^{(1)}(x', v)$, afin de s'assurer que les nouvelles conditions ne rentrent pas les unes dans les autres, ni dans les précédentes, ce qui arriverait si quelques-uns des termes qu'on veut faire disparaître avaient d'eux-mêmes des coefficients nuls.

D'après ce qui a été dit plus haut, il reste dans la fonction $N(x, y)$, après qu'on l'a assujettie aux conditions [A], $k - 1$ termes au moins qui, après la substitution $y = v x'^q$, sont divisibles par $x'^{(\alpha-1)q+\beta p-p+1}$, et

qui donneront dans $\mathfrak{T}^{(1)}(x', v)$ des termes indépendants de $x'$. Les exposants de $v$ dans ces termes sont égaux à ceux de $y$ dans les termes correspondants de $N(x, y)$ et varient chaque fois de $p$ unités; mais comme $p$ peut être l'unité, nous dirons simplement que les exposants sont au moins égaux respectivement à $0, 1, 2, \ldots, k-1$. En remplaçant $v$ par $v_1 + w$ et développant par la formule du binôme, on trouvera certainement des termes en $w^0, w^1, \ldots, w^{k-1}$. Leurs coefficients seront des combinaisons linéaires de ceux des termes correspondants de la fonction $N(x, y)$, lesquels sont restés complétement arbitraires. Le nombre $n'$ étant au plus égal à $k$, l'extrémité du polygone dérivé aboutira sur le nouvel axe $o\alpha$ au plus à la $k-1^{ième}$ division.

Il y aura donc assez de constantes arbitraires pour satisfaire aux conditions. D'après ce qui a été dit plus haut, celles-ci reviennent à exprimer que la fonction $\mathfrak{T}^{(1)}(x', v)$ et un certain nombre de ses dérivées partielles, relatives à $v$, s'annulent pour $x' = 0$, $v = v_1$.

Revenant à la fonction $N(x, y)$ et prenant les points qui sont situés sur la parallèle suivante au côté G, on en trouvera au moins $k-1$ qui, après la substitution $y = vx'^q$, donneront des termes contenant la première puissance de $x'$ en facteur. En posant $v = v_1 + w$ et développant les puissances des binômes, on trouvera donc des termes en $x', x'w, \ldots, x'w^{k-1}$, dont les coefficients contiendront linéairement au moins $k-1$ constantes arbitraires nouvelles. Le nombre des termes qui doivent disparaître ne pouvant que diminuer quand on passe d'une ligne horizontale du nouveau réseau à une ligne supérieure, comme le montre la forme convexe vers l'origine du nouveau polygone, il y aura assez de constantes pour les conditions relatives à la deuxième ligne horizontale du nouveau polygone. Elles consisteront à écrire que la fonction $\frac{d.\mathfrak{T}^{(1)}(x', v)}{dx'}$ et un certain nombre de ses dérivées partielles par rapport à $v$ s'annulent pour $x' = 0$, $v = v_1$. On continuera le même raisonnement pour les autres lignes.

9. Il est important d'observer que les conditions trouvées conviendront à toutes les racines de l'équation $v^p = \lambda$, dès qu'on les aura écrites pour l'une d'elles, ou mieux ces conditions ne dépendent que de $\lambda$. Par exemple, dans la fonction $\mathfrak{T}^{(1)}(0, v)$, les exposants de $v$ va-

rient chaque fois de $p$ unités. On pourra donc écrire

$$\mathfrak{N}^{(1)}(0, v) = v^k \varphi(v),$$

où $\varphi(v)$ ne dépend que de $v^p = \lambda$. On a à égaler à zéro les coefficients des puissances successives de $w$, après avoir posé $v = v_1 + w$. Comme on peut faire abstraction du facteur $(v_1 + w)^k$, on trouvera

$$\varphi(v_1) = 0, \quad \frac{d\varphi(v_1)}{dv_1} = 0, \quad \frac{d^2\varphi(v_1)}{dv_1^2} = 0, \quad \ldots$$

Posons

$$\varphi(v) = \psi(\lambda).$$

On aura finalement à exprimer que la fonction $\psi(\lambda)$ et un certain nombre de ses dérivées s'annulent pour $\lambda = v_1^p$.

On répétera le même raisonnement pour les conditions qui se rapportent aux termes contenant $x'$.

**10.** Si l'équation $L = 0$ a plusieurs racines multiples d'ordres $n'$, $n'_1$, $n'_2$, ou bien si plusieurs équations $L = 0$ admettent des racines multiples, il faudra construire autant de nouveaux polygones et répéter pour chacun d'eux ce qui a été dit plus haut.

Les conditions relatives aux termes indépendants de $x'$ dans la fonction $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)$, c'est-à-dire à ceux qui répondent aux premières lignes horizontales des nouveaux polygones, porteront toutes sur les termes de la fonction $\mathfrak{N}^{(1)}(0, v)$. Leur nombre sera au plus $n' - 1$ pour le premier polygone nouveau, $n'_1 - 1$ pour le second, $n'_2 - 1$ pour le troisième, etc. Pour un même côté G de l'ancien polygone, la somme des degrés de multiplicité $n'$, $n'_1$, $n'_2$,... est au plus égale à $k$. Il y aura donc en tout $k - 1$ conditions au plus, èt, par suite, un nombre suffisant de constantes arbitraires pour les exprimer toutes. De même, les conditions relatives aux termes qui contiennent la première puissance de $x'$, c'est-à-dire à ceux qui répondent aux deuxièmes lignes horizontales des nouveaux polygones, seront en nombre au plus égal à celui des conditions précédentes, et, par suite, au plus égal à $k - 1$, et ainsi de suite pour les autres lignes.

On voit, d'après cela, que, si dans l'ancien polygone on prolonge les droites $r_1 a'_1$, $r_2 a'_2$, elles comprendront entre elles des points répondant à des termes de $N(x, y)$, dont les coefficients sont arbitraires et en

nombre suffisant pour exprimer toutes les conditions de la deuxième approximation, relatives au côté $G_1$.

Le nombre des conditions sera ainsi $[A] + \Sigma[A]^{(1)}$. On aura, pour trouver $\Sigma[A]^{(1)}$, à appliquer la formule (4) autant de fois que l'on trouvera de racines multiples dans les équations $L = 0$.

**11.** Admettons maintenant que l'une des équations $L^{(1)} = 0$ de la deuxième approximation ait une racine multiple d'ordre $n''$.

Posons

$$x' = x''^{p'}, \quad w = v' x''^{q'};$$

on aura, comme précédemment,

$$F^{(1)}(x', w) = x''^{\alpha' q' + \beta' p'} \mathcal{F}^{(2)}(x'', v'),$$
$$F_w^{(1)\prime}(x', w) = x''^{(\alpha'-1) q' + \beta' p'} \mathcal{F}_{v'}^{(2)\prime}(x'', v').$$

Si l'on admet, pour un moment, que les conditions $[A] + \Sigma[A]^{(1)}$, trouvées plus haut, sont encore nécessaires, on aura

$$N^{(1)}(x', w) = x''^{(\alpha'-1) q' + \beta' p' - p' + 1} \mathcal{N}^{(2)}(x'', v'),$$

et l'intégrale

$$\int \frac{N^{(1)}(x', w)\, dx'}{F_w^{(1)\prime}(x', w)}$$

deviendra

$$\int \frac{\mathcal{N}^{(2)}(x'', v')\, dx''}{\mathcal{F}_{v'}^{(2)\prime}(x'', v')},$$

et il faudra ajouter aux conditions précédentes celles qui expriment que cette dernière intégrale est finie pour $x'' = 0$.

Pour cela, on posera

$$v' = v'_1 + w',$$

$v'_1$ étant la valeur approchée de $v'$.

Soient

$$\mathcal{F}^{(2)}(x'', v'_1 + w') = F^{(2)}(x'', w')$$

et

$$\mathcal{N}^{(2)}(x'', v'_1 + w') = N^{(2)}(x'', w'),$$

l'intégrale deviendra

$$\int \frac{N^{(2)}(x'', w')\, dx''}{F_{w'}^{(2)\prime}(x'', w')}.$$

On sera ainsi ramené aux cas précédents. En posant $w' = v'' x''^{\mu}$, le nombre des racines infiniment petites $w'$ et leurs degrés $\mu = \frac{p''}{q''}$ en $x''$ seront donnés par la méthode de M. Puiseux. Les valeurs approchées $v''_1$ de $v''$ satisferont à des équations $L^{(2)} = 0$, qu'on peut d'abord supposer n'avoir aucune racine multiple. En appliquant la formule (4) au nouveau polygone, on trouvera un nombre de conditions que j'appelle $[A]^{(2)}$, et qu'il faudra ajouter aux précédentes.

Pour montrer que celles-ci sont nécessaires, revenons à l'intégrale

$$\int \frac{\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)dx'}{\mathfrak{F}_v^{(1)\prime}(x', v)}.$$

Les valeurs infiniment petites de $w = v - v_1$ sont distinctes après deux approximations successives seulement. Il faut donc (n$^{os}$ 6 et 7) que tous les termes répondant à des points situés au-dessous du polygone dérivé abaissé d'une unité et sur ses côtés dans les conditions $[A]^{(1)}$ et $[A]^{(2)}$ aient des coefficients nuls. Or il résulte du n° 6 que cela entraîne les conditions $[A]$.

Les conditions $[A]^{(2)}$ consisteront à écrire que la fonction $\mathfrak{N}^{(2)}(x'', v')$ et un certain nombre de ses dérivées prises par rapport à $v'$ s'annulent pour $x'' = 0$, $v' = v'_1$; puis, que la fonction $\mathfrak{N}^{(2)\prime}_{x''}(x'', v')$ et un certain nombre de ses dérivées prises par rapport à $v'$ s'annulent pour les mêmes valeurs des variables, et ainsi de suite.

Ce qui a été dit dans la deuxième approximation s'appliquant ici sans changement, il y aura assez de constantes pour vérifier les conditions nouvelles, et celles-ci ne dépendront que de $v_1'^{p'}$.

Si l'équation $L^{(1)} = 0$ a plusieurs racines multiples, ou bien si plusieurs équations $L^{(1)} = 0$ ont des racines multiples, il faudra former autant de polygones relatifs à la troisième approximation et appliquer autant de fois la formule (4).

Le nombre des conditions sera ainsi

$$[A] + \Sigma[A]^{(1)} + \Sigma[A]^{(2)}.$$

12. D'une manière générale, supposons que l'on trouve des racines multiples jusque dans les équations $L^{(r-1)} = 0$, l'une d'elles ayant une racine d'ordre de multiplicité $n^{(r)}$.

On posera, en adoptant une loi de notation évidente,

$$x^{(r-1)} = x^{(r)p^{(r-1)}}, \quad w^{(r-2)} = v^{(r-1)} x^{(r)q^{(r-1)}},$$

$$F^{(r-1)}(x^{(r-1)}, w^{(r-2)}) = x^{(r)\alpha^{(r-1)}q^{(r-1)}+\beta^{(r-1)}p^{(r-1)}} \mathcal{F}^{(r)}(x^{(r)}, v^{(r-1)}).$$

Si l'on admet que les conditions $[A] + \Sigma[A]^{(1)} + \ldots + \Sigma[A]^{(r-1)}$, nécessaires quand les équations $L^{(r-1)} = 0$ ont leurs racines distinctes, le sont encore quand plusieurs de ces racines sont égales, on pourra écrire

$$N^{(r-1)}(x^{(r-1)}, w^{(r-2)}) = x^{(r)[\alpha^{(r-1)}-1]q^{(r-1)}+\beta^{(r-1)}p^{(r-1)}-p^{(r-1)}+1} \mathfrak{N}^{(r)}(x^{(r)}, v^{(r-1)}),$$

et l'intégrale se réduira à

$$\int \frac{\mathfrak{N}^{(r)}(x^{(r)}, v^{(r-1)})\,dx^{(r)}}{\mathcal{F}^{(r)\prime}_{v^{(r-1)}}(x^{(r)}, v^{(r-1)})}.$$

$v_1^{(r-1)}$ étant une des valeurs approchées de $v^{(r-1)}$, on posera

$$v^{(r-1)} = v_1^{(r-1)} + w^{(r-1)}.$$

Les valeurs infiniment petites de $w^{(r-1)}$ seront fournies par l'équation

$$\mathcal{F}^{(r)}(x^{(r)}, v_1^{(r-1)} + w^{(r-1)}) = F^{(r)}(x^{(r)}, w^{(r-1)}) = 0.$$

En désignant $\mathfrak{N}^{(r)}(x^{(r)}, v_1^{(r-1)} + w^{(r-1)})$ par $N^{(r)}(x^{(r)}, w^{(r-1)})$, l'intégrale deviendra enfin

$$\int \frac{N^{(r)}(x^{(r)}, w^{(r-1)})\,dx^{(r)}}{F^{(r)\prime}_{w^{(r-1)}}(x^{(r)}, w^{(r-1)})},$$

et, en appliquant la formule (4) au polygone correspondant, on trouvera un nombre $[A]^{(r)}$ de conditions qu'il faudra ajouter aux précédentes.

En répétant de proche en proche le raisonnement qui a été fait plus haut, on se convaincra immédiatement que les conditions

$$[A] + \Sigma[A]^{(1)} + \ldots + \Sigma[A]^{(r-1)}$$

sont nécessaires.

Ajoutons enfin qu'il y aura à former autant de polygones de cette

dernière série, qu'on trouvera de racines multiples dans les équations $L^{(r-1)} = 0$.

Le nombre total des conditions relatives au point critique $a$ sera donc

$$A_a = [A] + \Sigma[A]^{(1)} + \ldots + \Sigma[A]^{(r)}.$$

## III.

13. Supposons que l'on élimine $y$ entre les deux équations $F(x, y) = 0$, $F'_y(x, y) = 0$. Je dis que l'équation finale en $x$ sera du degré $m(m-1)$. C'est ce qui a lieu, comme on sait, quand l'équation $F(x, y) = 0$ est la plus générale de son degré.

Supposons qu'on altère les coefficients de l'équation générale, de manière à obtenir l'équation particulière donnée. Observons que les valeurs de $x$, qui sont racines de l'équation finale, ne peuvent correspondre qu'à des points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des $y$ ou bien à des points multiples. Or, à cause de la substitution du premier degré, qui a été faite au commencement, on peut supposer que la courbe n'a pas de directions asymptotiques parallèles à l'axe des $y$, et que les points à l'infini sont des points simples. Le degré $m(m-1)$ de l'équation finale ne sera donc pas abaissé.

Les abscisses des points critiques $a, a_1, a_2, \ldots$ sont les racines de cette équation. Nous allons voir comment on peut déterminer, pour chaque racine, le degré de multiplicité.

14. Transportons l'origine des coordonnées au point critique $a$. Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les valeurs de $y$ tirées de l'équation $F(x, y) = 0$. Le résultat de l'élimination pourra s'écrire

$$F'_y(x, y_1) F'_y(x, y_2) \ldots F'_y(x, y_m) = 0.$$

Si la courbe proposée n'a pas d'autres points critiques que l'origine sur le nouvel axe des $y$, il est clair que les seules racines infiniment petites $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rendront infiniment petits les facteurs correspondants du produit précédent. Appelons $\Delta_a$ la somme des degrés de ces facteurs qui est toujours, comme nous verrons, un nombre entier. L'équation finale admettra la racine $x = 0$ au degré $\Delta_a$ de multiplicité.

S'il y a sur l'axe des $y$ un autre point critique $a_1$, dont l'ordonnée est actuellement $b_1 - b$, les racines $y$ infiniment peu différentes de $b_1 - b$ rendront aussi infiniment petits les facteurs qui leur correspondent. En désignant par $\Delta_{a_1}$ la somme des degrés relatifs à ces racines, l'équation finale aura une racine $x = 0$ du degré $\Delta_a + \Delta_{a_1}$.

Dans tous les cas, si l'on évalue la somme des valeurs de $\Delta$ pour tous les points critiques, la somme de ces valeurs sera égale au degré de l'équation finale, c'est-à-dire à $m(m-1)$.

**15.** Pour déterminer $\Delta_a$, reprenons le polygone élémentaire du n° 2, et supposons d'abord que les équations $L = 0$ n'aient pas de racines multiples.

Au groupe $G_1$, par exemple, correspondent $\alpha_1 - \alpha_2$ valeurs de $y$ de l'ordre $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$. Une de ces racines, substituée dans la dérivée $F'_y(x, y)$, donnera le degré d'un terme de $G'_1$, c'est-à-dire

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_1 - 1) + \beta_1$$

et comme il y a $\alpha_1 - \alpha_2$ de ces racines, on aura pour ce groupe

$$(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_1 - 1) + \beta_1(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \beta_1 - \beta_2.$$

En répétant le même raisonnement pour tous les groupes, on trouvera

$$\begin{array}{llllll}
G_0 & = n\beta_1 & & & & -\beta_1, \\
G_1 & = \alpha_1\beta_2 & -\alpha_2\beta_1 & & +\beta_1 & -\beta_2, \\
G_2 & = \alpha_2\beta_3 & -\alpha_3\beta_2 & & +\beta_2 & -\beta_3, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
G_{h-1} & = \alpha_{h-1}\beta_h & -\alpha_h\beta_{h-1} & & +\beta_{h-1} & -\beta_h, \\
G_h & = \alpha_h l & & & +\beta_h & -l,
\end{array}$$

et en faisant la somme

$$\Delta_a = n\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \ldots + (\alpha_{h-1}\beta_h - \alpha_h\beta_{h-1}) + \alpha_h l - l,$$

qu'on peut écrire ainsi

$$\Delta_a = \sum_{i=0}^{i=h} (\alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i) - l \tag{6}$$

Rapprochant ce résultat de la formule (4), nous en conclurons

$$2A_a = \Delta_a - n + \sum_{i=0}^{i=h} k_i.$$

Les $n$ racines relatives au point critique $a$ se partagent en $k_0$ systèmes circulaires de $p_0$ racines pour le groupe $G_0$, en $k_1$ systèmes de $p_1$ racines pour le groupe $G_1$, etc. A chaque système circulaire de $p$ racines correspondent $p$ lacets binaires que l'on peut réduire à $p-1$ d'entre eux [1]. En supprimant ainsi l'un des lacets binaires de chaque système circulaire et désignant par $N_a$ le nombre des lacets relatifs au point critique $a$, on aura

$$N_a = \sum_{i=0}^{i=h} k_i(p_i - 1) = n - \sum_{i=0}^{i=h} k_i,$$

et la relation précédente devient

$$(7) \qquad 2A_a + N_a = \Delta_a.$$

16. L'évaluation de $\Delta_a$ qui vient d'être faite suppose que les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples. On a vu, en effet, que par la substitution $y = vx'^q$ la fonction $F'_y(x, y)$ devenait $x'^{(\alpha-1)q+\beta p}\,\mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v)$. La somme des degrés $(\alpha - 1)\frac{q}{p} + \beta$ relatifs à $x$ et effectuée pour toutes les racines infiniment petites donne le nombre fourni par la formule (6) et que nous appellerons maintenant $[\Delta]$. Mais il faut ajouter à $[\Delta]$ la somme des degrés que donnent dans le second facteur $\mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v)$, les valeurs de $v$ répondant à des racines multiples des équations $L = 0$.

Si $v_1$ est la valeur approchée de $v$, la dérivée précédente deviendra après la substitution $v = v_1 + w$, $F_w^{(1)\prime}(x', w)$, les valeurs de $w$ satisfaisant à l'équation $F^{(1)}(x', w) = 0$. On est alors ramené au cas précédent. En faisant $w = v'x'^{\frac{q'}{p'}}$, on pourra d'abord supposer que les équations $L^{(1)} = 0$ qui donnent les valeurs approchées de $v'^{p'}$ n'ont pas de racines multiples. Dans ce cas il suffira d'ajouter à $[\Delta]$ des nombres analogues

---

[1] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 55.

donnés par la formule (6), mais relatifs aux polygones de la deuxième approximation. Soit $[\Delta]^{(1)}$ un de ces nombres; on aura pour le degré total

$$[\Delta] + \Sigma[\Delta]^{(1)}.$$

Observons que, l'évaluation des $[\Delta]^{(1)}$ s'effectuant avec la variable $x' = x^{\frac{1}{p}}$, le résultat devrait être divisé par $p$ pour revenir à la variable indépendante $x$. Mais à chaque valeur de $\lambda$ répondent $p$ valeurs de $y$; on devra donc conserver le résultat obtenu comme représentant un degré relatif à $x$.

Si les équations $L^{(1)} = 0$ ont des racines multiples, on fera les substitutions

$$x' = x''^{p'}, \quad w = v' x''^{q'}.$$

On a vu que

$$F_w^{(1)'}(x', w) = x''^{(\alpha'-1)q' + \beta' p'} \mathcal{F}_{v'}^{(2)'}(x'', v').$$

La somme des degrés répondant au premier facteur a été faite dans les quantités $[\Delta]^{(1)}$. Mais il faut y ajouter maintenant les degrés relatifs au second facteur. On les évaluera comme précédemment et l'on sera conduit à ajouter aux quantités précédentes des nombres $[\Delta]^{(2)}$ fournis par la formule (6), mais relatifs à tous les polygones de la troisième approximation.

Les nombres $[\Delta]^{(2)}$, bien qu'évalués avec la variable $x'' = x^{\frac{1}{pp'}}$, doivent être considérés comme donnant un degré relatif à $x$; car à chaque valeur infiniment petite $w' = v' - v'_1$ correspondent $pp'$ valeurs de $y$.

Il est clair que, si l'on trouve des racines multiples jusque dans les équations $L^{(r-1)} = 0$ inclusivement, la somme des degrés relatifs à toutes les racines $y$ infiniment petites ou $\Delta_a$ sera exprimée par la formule suivante :

$$\Delta_a = [\Delta] + \Sigma[\Delta]^{(1)} + \Sigma[\Delta]^{(2)} + \ldots + \Sigma[\Delta]^{(r)}.$$

**17.** On peut conclure de ce qui précède que la formule (7) est générale.

D'après les définitions des quantités $[A]^{(i)}$ et $[\Delta]^{(i)}$, on a

$$2[A]^{(i)} = [\Delta]^{(i)} - n^{(i)} + \Sigma k^{(i)},$$

$n^{(i)}$ étant le nombre de racines infiniment petites répondant au polygone considéré et $\Sigma k^{(i)}$ se rapportant à tous les nombres $k$ que l'on rencontre dans la construction de ce polygone. En faisant la somme de toutes les égalités analogues, on trouvera

$$2A_a = \Delta_a - n - \Sigma n' - \Sigma n'' - \ldots - \Sigma n^{(r)} + \Sigma k + \Sigma k' + \Sigma k'' + \ldots + \Sigma k^{(r)},$$

où $\Sigma n^{(i)}$ et $\Sigma k^{(i)}$ s'étendent maintenant aux nombres que l'on rencontre dans tous les polygones de la $(i+1)^{ième}$ approximation. Nous allons voir que la quantité qui suit $\Delta_a$ dans le second membre de l'égalité précédente représente, quand on change son signe, le nombre $N_a$ des lacets répondant à chaque système circulaire quand on a supprimé l'un d'eux, comme il a été dit plus haut.

Admettons d'abord que l'une des équations $L = 0$ seulement ait des racines multiples. L'équation $L_1 = 0$, par exemple, aura une racine d'ordre $n'$. Le partage des racines en systèmes circulaires se fera comme précédemment, à l'exception des racines qui répondent à la valeur multiple. Ayant posé $v = v_1 + w$ les valeurs infiniment petites de $w$ se partageront en $k'_0$ groupes de $p'_0 - 1$ quantités, $k'_1$ groupes de $p'_1 - 1$ quantités, etc. On sait alors que les valeurs de $y$ correspondantes se partagent en $k'_0$ groupes de $p_1 p'_0$ quantités, en $k'_1$ groupes de $p_1 p'_1$ quantités, etc.

En supprimant un des lacets dans chaque système circulaire, on trouvera donc

$$\begin{aligned} N_a = k_0(p_0 - 1) + (k_1 - n')(p_1 - 1) + k_2(p_2 - 1) + \ldots \\ + k_h(p_h - 1) + \Sigma k'(p_1 p' - 1) \end{aligned}$$

et, comme $\Sigma kp = n$ et $\Sigma k'p' = n'$, on aura

$$N_a = n + n' - \Sigma k - \Sigma k'.$$

Il est clair que, si l'équation $L_1 = 0$ a plusieurs racines multiples ou si plusieurs équations $L = 0$ ont des racines multiples, on aura

$$N_a = n + \Sigma n' - \Sigma k - \Sigma k',$$

où $\Sigma n'$ est la somme des multiplicités des racines dans toutes les équations $L = 0$ et où $\Sigma k'$ s'étend à toutes les quantités $k$ qu'on rencontre dans les polygones de la deuxième approximation.

Supposons, d'une manière générale, qu'ayant trouvé des racines multiples jusque dans les équations $L^{(r-2)} = 0$, on ait vérifié que le nombre $N_a$ des lacets binaires réduits comme on l'a vu est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}&\Sigma k(p-1) + \Sigma k'(pp'-1) + \ldots + \Sigma k^{(r-1)}[pp'\ldots p^{(r-1)} - 1]\\ &= n + \Sigma n' + \ldots + \Sigma n^{(r-1)} - \Sigma k - \Sigma k' - \ldots - \Sigma k^{(r-1)}.\end{aligned}$$

Je dis que la même loi s'étendra au cas où une des équations $L^{(r-1)} = 0$ aurait des racines multiples. Admettons que l'une d'elles admette une racine d'ordre $n^{(r)}$. Les valeurs de $y$ correspondantes se partageront en systèmes circulaires de $pp'\ldots p^{(r-1)}p^{(r)}$ quantités. On devra donc retrancher de l'expression précédente $n^{(r)}(pp'\ldots p^{(r-1)}p^{(r)} - 1)$ unités, puis y ajouter les lacets nouveaux au nombre de

$$\Sigma k^{(r)}[pp'\ldots p^{(r-1)}p^{(r)} - 1].$$

Cette dernière expression peut s'écrire

$$pp'\ldots p^{(r-1)}\Sigma k^{(r)}p^{(r)} - \Sigma k^{(r)},$$

et, comme $\Sigma k^{(r)}p^{(r)}$ est égale à $n^{(r)}$, il faudra en définitive modifier la formule précédente en lui ajoutant $n^{(r)} - \Sigma k^{(r)}$, ce qui démontre la généralité de l'expression trouvée. Ainsi l'on a, dans tous les cas,

$$2A_a + N_a = \Delta_a.$$

18. Le nombre des intégrales de première espèce se déduit aisément de ce qui précède.

Soit A la somme des nombres $A_a$, $A_{a_1}, \ldots$ relatifs à tous les points critiques et N la somme $N_a + N_{a_1} + \ldots$. On sait que la somme des nombres $\Delta_a$, $\Delta_{a_1}, \ldots$ (n° 14) est égale à $m(m-1)$. On aura donc

$$2A + N = m(m-1).$$

La fonction $N(x, y)$, étant du degré $m-3$, contient $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ paramètres arbitraires. Quand on l'aura assujettie aux A conditions trouvées plus haut, elle renfermera donc encore un nombre de paramètres variables égal à

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - A = \frac{N}{2} - (m-1).$$

C'est le nombre des intégrales de première espèce.

Quant au nombre P des périodes de l'intégrale, MM. Briot et Bouquet ont démontré [1] qu'il est égal à

$$P = N - 2(m - 1),$$

ce qui donne la relation

$$P = 2p.$$

19. Comme application, supposons que la courbe $F(x, y) = 0$ ait un point singulier tel, qu'en y transportant l'origine, les termes du degré le moins élevé soient

$$y^\alpha - ax^\beta.$$

Appelons $k$ le plus grand commun diviseur de $\alpha$ et $\beta$. La formule générale (4) donnera

$$2A_a = \alpha\beta - \alpha - \beta + k.$$

Si l'origine est un point de rebroussement de première espèce, en prenant la tangente comme axe des $x$, les termes du degré le moins élevé seront $y^2 - ax^3$ et l'on aura $A_a = 1$.

Considérons encore le cas où $\beta = 1$. L'origine est un point simple; mais l'axe des $y$, qui est la tangente, a, avec la courbe, un contact d'ordre plus élevé. La formule précédente donne $A_a = 0$. Ces points n'exigent aucune condition.

20. Admettons que l'origine soit un point de rebroussement de deuxième espèce, c'est-à-dire que la tangente y rencontre la courbe en quatre points confondus. Prenant comme axe des $x$ la tangente de rebroussement, le terme en $x^3$ devra manquer, et l'équation s'écrira

$$F(x, y) = y^2 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + dx^4 + ex^3y + \ldots = 0.$$

Il est facile de voir que le polygone élémentaire se réduit ici à une ligne droite répondant aux termes

$$y^2 + ax^2y + dx^4;$$

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 181.

on aura donc $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $k = 2$, et l'on en conclura

$$A_a = 2$$

si l'équation $v^2 + av + d = 0$ a ses racines inégales.

21. Considérons la courbe

$$F(x, y) = y^3 + 3x^2y^2 - (x^2 - y^2)^2 y^2 - 4x^6 = 0$$

et étudions le point triple qui est à l'origine. On voit aisément que les termes du moindre degré sont

$$y^3 + 3x^2y^2 - 4x^6 = (y - x^2)(y + 2x^2)^2.$$

Ayant posé $y = vx^\mu$, on aura $\mu = 2$ et $v_1$ satisfera à l'équation

$$L = v^3 + 3v^2 - 4 = (v - 1)(v + 2)^2.$$

Le polygone élémentaire se réduira à une ligne droite, et l'on aura

$$[A] = \tfrac{1}{2}(3 \times 6 - 3 - 6 + 3) = 6.$$

L'équation $L = 0$ ayant une racine double, il faudra (n° 6) poser $y = vx^2$; après avoir supprimé le facteur $x^6$, il restera

$$\mathcal{F}^{(1)}(x, v) = v^3 + 3v^2 - 4 - v^2(x - v^2x^3)^2.$$

Posons $v = -2 + w$, on aura

$$F^{(1)}(x, w) = w^2(w - 3) - (w - 2)^2[x - (w - 2)^2x^3]^2 = 0.$$

On s'assure aisément que le nouveau polygone élémentaire se réduit à une ligne droite et que les termes du degré le moins élevé sont

$$-3w^2 - 4x^2.$$

On en conclut $[A]^{(1)} = 1$, et, par suite,

$$A_a = [A] + [A]^{(1)} = 7.$$

# SECONDE PARTIE.

22. On peut tirer de la théorie générale deux corollaires qui nous seront utiles pour la suite.

1° Nous avons vu au n° 5 que, si les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples, la fonction

$$U = \frac{F'_Y(x, y)}{N(x, y)}$$

était un infiniment petit d'ordre $1 - \frac{1}{p}$, pour une racine $y$ appartenant à un système circulaire de $p$ quantités. Cette propriété est générale.

Par la substitution $x = x'^p$, $y = v x'^q$, U devient

$$\frac{x'^{(\alpha-1)q+\beta p}\,\mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v)}{x'^{(\alpha-1)q+\beta p-p+1}\,\mathcal{N}^{(1)}(x', v)} = x'^{p-1}\frac{\mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v)}{\mathcal{N}^{(1)}(x', v)},$$

et, en posant $v = v_1 + w$,

$$U = x'^{p-1}\frac{F_w^{(1)\prime}(x', w)}{N^{(1)}(x', w)}.$$

$w$ étant une fonction de $x'$ de l'ordre $\frac{q'}{p'}$, si l'on admet d'abord que les équations $L^{(1)} = 0$ n'aient pas de racines multiples, le second facteur sera en $x'$ de l'ordre $1 - \frac{1}{p'}$; U sera donc de l'ordre $p - \frac{1}{p'}$ et par rapport à $x$ de l'ordre $1 - \frac{1}{pp'}$.

Si les équations $L^{(1)} = 0$ ont des racines multiples, on posera

$$x' = x''^{p'}, \quad w = v' x''^{q'},$$

et U deviendra

$$x''^{pp'-p'}\frac{x''^{(\alpha'-1)q'+\beta' p'}\,\mathcal{F}_{v'}^{(2)\prime}(x'', v')}{x''^{(\alpha'-1)q'+\beta' p'-p'+1}\,\mathcal{N}^{(2)}(x'', v')} \quad \text{ou} \quad x''^{pp'-1}\frac{\mathcal{F}_{v'}^{(2)\prime}(x'', v')}{\mathcal{N}^{(2)}(x'', v')}.$$

En posant maintenant $v' = v'_1 + w'$, on aura

$$U = x''^{pp'-1} \frac{F_{w'}^{(2)\prime}(x'', w')}{N^{(2)}(x'', w')}.$$

$w'$ étant une fonction de $x''$ de l'ordre $\frac{q''}{p''}$, si l'on admet que les équations $L^{(2)} = 0$ n'aient pas de racines multiples, le second facteur sera de l'ordre $1 - \frac{1}{p''}$ en $x''$, et U de l'ordre $pp' - \frac{1}{p''}$, c'est-à-dire par rapport à $x$ de l'ordre $1 - \frac{1}{pp'p''}$.

Il est évident que cette loi est générale.

**23.** 2° Supposons que l'on élimine $y$ entre les deux équations

$$F(x, y) = 0, \quad N(x, y) = 0,$$

la fonction $N(x, y)$, qui est ici d'un degré quelconque, égal ou supérieur à $m - 3$, ayant été assujettie aux A conditions trouvées plus haut. Les abscisses des points critiques $a, a_1, \ldots$ seront des racines de l'équation finale. Je dis que la somme des multiplicités de ces racines est 2 A.

Le résultat de l'élimination peut s'écrire

$$N(x, y_1) N(x, y_2) \ldots N(x, y_m) = 0.$$

Admettons, comme précédemment, que l'origine ait été transportée en un point critique $a$, et cherchons la somme des degrés que donnent les $n$ racines infiniment petites répondant à ce point. Rappelons que, si l'on fait $x = x'^p$, $y = v x'^q$, on aura

$$F'_y(x, y) = x'^{(\alpha-1)q+\beta p} \mathcal{F}_v^{(1)\prime}(x', v),$$
$$N(x, y) = x'^{(\alpha-1)q+\beta p-p+1} \mathcal{N}^{(1)}(x', v).$$

Il est clair que, si les équations $L = 0$ n'ont pas de racines multiples, une racine infiniment petite $y$ donnera dans $N(x, y)$ un degré inférieur de $1 - \frac{1}{p}$ à celui de la substitution dans $F'_y(x, y)$, $x$ étant la variable indépendante. La somme des degrés que donnent dans cette dérivée les $n = \Sigma kp$ racines infiniment petites étant $\Delta_a$ (n° 15), la somme des

degrés pour la fonction $N(x, y)$ sera

$$\Delta_a - \Sigma kp\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \Delta_a - n + \Sigma k = \Delta_a - N_a = 2A_a.$$

Si les équations $L = 0$ ont des racines multiples, il faudra ajouter au degré précédent, que nous désignons par $2[A]$, d'autres nombres qu'on obtiendra en cherchant les degrés des fonctions telles que $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v)$ pour les racines $v = v_1 + w$, dont les valeurs approchées sont multiples. Ayant posé $\mathfrak{N}^{(1)}(x', v_1 + w) = N^{(1)}(x', w)$, on trouvera, comme plus haut, qu'il faut ajouter

$$[\Delta]^{(1)} - n^{(1)} + \Sigma k^{(1)} = 2[A]^{(1)}.$$

S'il y a plusieurs racines multiples dans les équations $L^{(1)} = 0$, on aura de même pour le degré

$$2[A] + 2\Sigma[A]^{(1)} \quad \text{ou bien} \quad 2A_a.$$

On voit suffisamment que ce résultat est général. En étendant ce raisonnement à tous les points critiques, on trouvera $2A$ pour la somme des multiplicités.

En s'appuyant sur ces deux propositions, on peut étendre au cas général les théorèmes donnés par Clebsch dans le cas particulier des points doubles, relativement aux courbes pour lesquelles A a les valeurs

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) \quad \text{ou bien} \quad \tfrac{1}{2}m(m-3).$$

*Cas où* A *est égal à* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$.

24. Il n'y a pas alors d'intégrales de première espèce; mais toutes les intégrales où le coefficient différentiel est une fonction rationnelle des deux variables $x$ et $y$ liées par l'équation $F(x, y) = 0$ se ramènent aux fonctions algébriques et logarithmiques. Je dis, en effet, que la courbe $F(x, y) = 0$ est unicursale.

Prenons une courbe d'ordre $m - 1$ complétement arbitraire, et assujettissons-la aux A conditions précédentes. Le nombre des paramètres qui entrent dans l'équation de la courbe étant $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$, il restera encore

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m+2) - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) = 2m - 2$$

paramètres variables. Choisissons arbitrairement $2m - 3$ points sur la courbe $F(x, y) = 0$, et écrivons les conditions qui expriment que ces points appartiennent à la courbe d'ordre $m - 1$. Il restera dans l'équation un paramètre variable, en sorte que l'on aura un faisceau de courbes dont l'équation sera

$$\varphi(x, y) + \lambda\varphi_1(x, y) = 0,$$

en désignant par $\varphi(x, y) = 0$ et $\varphi_1(x, y) = 0$ deux courbes particulières satisfaisant aux conditions énoncées.

Si maintenant on élimine $y$ entre l'équation $F(x, y) = 0$ et celle des courbes du faisceau, l'équation finale en $x$ sera du degré $m(m-1)$, puisqu'on a effectué dans la fonction $F(x, y)$ une substitution linéaire. Les abscisses des points critiques y figureront comme racines avec des multiplicités dont la somme est $2A = (m-1)(m-2)$. Les abscisses des $2m - 3$ points choisis sur la courbe proposée seront aussi des racines, ce qui donnera pour la somme des degrés de tous ces points

$$(m-1)(m-2) + 2m - 3 = m(m-1) - 1.$$

Une seule des racines de l'équation finale dépendra de $\lambda$, et il est facile de voir qu'elle est une fonction rationnelle de $\lambda$. Il suffit pour s'en convaincre de donner à $\lambda$ une autre valeur, $\lambda'$, et de remarquer que les deux équations en $x$ ont un plus grand commun diviseur du degré $m(m-1) - 1$. D'après la théorie du plus grand commun diviseur, ce facteur, et celui qui reste après sa suppression, sont rationnels.

On démontrera de même que $y$ s'exprime rationnellement en $\lambda$. Donc la courbe proposée est unicursale [1].

*Cas où* A *est égal à* $\frac{1}{2}m(m-3)$.

**25.** Le nombre des intégrales de première espèce se réduit alors à l'unité. Cette intégrale sera

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{U}, \quad \text{où} \quad U = \frac{F'_y(x, y)}{N(x, y)}.$$

---

[1] Le fond de ce raisonnement appartient à Clebsch (*Journal de Crelle*, t. LXIV, p. 44).

U est une fonction algébrique de $x$, et, en considérant $x$ comme donné, les valeurs de U seront distinctes, excepté pour les points critiques $a$, $a_1$,.... On n'a pas à s'occuper des valeurs infinies des variables $x$ et $y$, à cause de la substitution linéaire supposée effectuée dans la fonction $F(x, y)$. Considérant l'un des points critiques et une racine correspondante $y$, appartenant à un système circulaire de $p$ quantités, on sait que U sera, pour l'abscisse du point critique, un infiniment petit de l'ordre $1 - \frac{1}{p}$ (n° 22). Si $p = 1$, U conserve une valeur finie et est évidemment une fonction monodrome de $x$ pour la valeur de $y$ considérée.

Je dis maintenant que U ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de $x$; car, en éliminant $y$ entre les deux équations $F(x, y) = 0$, $N(x, y) = 0$, les abscisses des points critiques seront racines de l'équation finale avec des multiplicités dont la somme est $2A$, ou bien $m(m-3)$, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas d'autres racines; et, comme U ne devient pas infini pour les points critiques, il restera fini pour toutes les valeurs finies de $x$.

De là, en appliquant deux théorèmes donnés par MM. Briot et Bouquet [1], on conclura que $x$ est une fonction monodrome et doublement périodique de $z$. D'après un théorème connu de M. Liouville, $x$ s'exprimera rationnellement à l'aide d'une fonction elliptique $\lambda(z)$ et de sa dérivée.

Prenons maintenant $y$ comme variable indépendante. On a identiquement

$$F'_x(x, y)\,dx + F'_y(x, y)\,dy = 0;$$

d'où

$$\frac{dx}{F'_y(x, y)} = -\frac{dy}{F'_x(x, y)}$$

et, par suite,

$$-z = \int_{y_0}^{y} \frac{N(x, y)\,dy}{F'_x(x, y)}.$$

En répétant le raisonnement précédent pour la fonction

$$V = \frac{F'_x(x, y)}{N(x, y)},$$

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 381 et 387.

on verra que $y$ est une fonction rationnelle d'une certaine fonction elliptique $\lambda_1(z)$ et de sa dérivée.

Appelons $\omega$ et $\omega'$ un système de périodes de la fontion $\lambda(z)$, $\omega_1$ et $\omega'_1$ un système de périodes de la fonction $\lambda_1(z)$. Les systèmes de parallélogrammes correspondants auront un réseau de points communs; sans cela à des valeurs de $z$ de la forme $z + m\omega + m'\omega'$ répondraient une seule valeur de $x$ et une infinité de valeurs de $y$, ce qui est impossible, $x$ et $y$ étant liés par une équation algébrique.

Soit $\varepsilon$, $\varepsilon'$ un système de périodes répondant à ce réseau, en sorte que

$$\varepsilon = a\omega + b\omega', \quad \varepsilon = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1,$$
$$\varepsilon' = a'\omega + b'\omega', \quad \varepsilon' = a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1.$$

Appelons $\lambda_2(z)$ une fonction elliptique dont les périodes soient $\varepsilon$, $\varepsilon'$. On sait que $\lambda(z)$ s'exprime rationnellement par rapport à $\lambda_2(z+\alpha)$, où $\alpha$ est une constante convenablement choisie [1]; $\lambda(z)$ sera donc une fonction rationnelle de $\lambda_2(z)$ et de sa dérivée. Il en sera de même de $\lambda'(z)$. On verra de la même façon que $\lambda_1(z)$ et sa dérivée s'expriment rationnellement en $\lambda_2(z)$ et $\lambda'_2(z)$. On en conclura que la même propriété a lieu pour $x$ et $y$, en d'autres termes que $x$ et $y$ peuvent s'exprimer en fonction d'une variable auxiliaire $u = \lambda_2(z)$ par des formules ne contenant d'autre irrationnelle qu'un radical carré portant sur une expression du quatrième degré en $u$.

Il en résulte que toute intégrale dans laquelle le coefficient différentiel est une fonction rationnelle de $x$ et $y$ s'exprimera par des fonctions algébriques et logarithmiques, et les intégrales elliptiques des trois espèces.

**26.** Nous n'avons pas eu à nous occuper, jusqu'à présent, des valeurs infinies des variables, à cause de la substitution linéaire supposée faite dans la fonction $F(x, y)$. Cette substitution revient à considérer une projection conique ou perspective de la courbe proposée. En vue de l'application aux cas particuliers, voici la remarque qu'on peut faire.

Rendons l'équation homogène et posons

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = F(x, y, t).$$

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 276.

L'équation $F(x, y, t) = 0$ peut être envisagée de deux manières distinctes : 1° elle représente la courbe en coordonnées homogènes; 2° $x$, $y$, $t$ étant regardées comme coordonnées trilinéaires, l'équation représentera une perspective de la courbe proposée. Les points à l'infini de cette dernière répondront à des points de la perspective situés sur le côté $t = 0$ du triangle de référence. On cherchera les points singuliers situés sur ce côté; et, pour trouver la valeur de $A_a$, on fera $x = 1$ ou $y = 1$, ce qui reviendra à considérer une nouvelle perspective de la courbe : on appliquera alors la formule (4). Nous allons faire l'application à plusieurs exemples.

**27.** MM. Briot et Bouquet ont démontré que, parmi les équations différentielles de la forme

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u),$$

où $f(u)$ désigne un polynôme, il y en a onze seulement qui sont susceptibles d'une intégrale monodrome et doublement périodique. Ce sont :

1° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = g(u-a)(u-a_1)(u-a_2);$$

2° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = g(u-a)(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3);$$

3° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = g(u-a)^2(u-a_1)^2;$$

4° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = g(u-a)^2(u-a_1)^2(u-a_2)^2;$$

5° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = g(u-a)^2(u-a_1)^3;$$

6° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = g(u-a)^3(u-a_1)^3;$$

7 $$\left(\frac{du}{dz}\right)^4 = g(u-a)^2(u-a_1)^3(u-a_2)^3;$$

8° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^3(u-a_1)^4;$$

9° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^3(u-a_1)^5;$$

10° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^4(u-a_1)^5;$$

11° $$\left(\frac{du}{dz}\right)^6 = g(u-a)^3(u-a_1)^4(u-a_2)^5.$$

Il est facile de vérifier que, dans ces onze cas, la courbe $y^m = f(x)$ a des points singuliers tels que $A = \frac{1}{2}k(k-3)$, $k$ étant le degré de la courbe. Nous pourrons en conclure que toutes les intégrales pour lesquelles le coefficient différentiel est une fonction rationnelle des coordonnées d'un point de la courbe s'expriment par les fonctions algébriques et logarithmiques et par les intégrales elliptiques des trois espèces.

Les points singuliers sont tous de la nature de celui qui a été étudié au n° 19. Je me borne à quelques cas.

1° La courbe $y^2 = g(x-a)(x-a_1)(x-a_2)$ est du troisième ordre et n'a pas de points multiples.

2° La courbe $y^2 = g(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ n'a pas de point singulier à distance finie. Rendons l'équation homogène

$$y^2t^2 = g(x-at)(x-a_1t)(x-a_2t)(x-a_3t).$$

Pour $t=0$, on a $x^4=0$. Afin d'étudier ce point, je fais $y=1$.

$$t^2 = g(x-at)(x-a_1t)(x-a_2t)(x-a_3t).$$

L'origine actuelle est un point de rebroussement de deuxième espèce qui équivaut (20) à deux conditions. On a donc $A=2$, ce qui est la valeur de $\frac{1}{2}m(m-3)$ pour $m=4$.

3° La courbe $y^3 = g(x-a)^2(x-a_1)^2$ présente à distance finie deux points de rebroussement de première espèce. On voit aisément que le point à l'infini est un point simple.

4° La courbe $y^3 = g(x-a)^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2$ présente trois points de rebroussement de première espèce. Rendons l'équation homogène :

$$y^3t^3 = g(x-at)^2(x-a_1t)^2(x-a_2t)^2.$$

Pour $t = 0$ on a $x^6 = 1$. Faisons $y = 1$,

$$t^3 = g(x - at)^2(x - a_1 t)^2(x - a_2 t)^2.$$

On voit aisément que les termes de moindre degré sont

$$t^3 - gx^6.$$

Ce point exige un nombre de conditions égal à

$$\tfrac{1}{2}(3 \times 6 - 3 - 6 + 3) = 6.$$

On aura donc

$$A = 9,$$

ce qui est bien la valeur de $\frac{1}{2}m(m-3)$ pour $m = 6$.

Je me contenterai d'examiner encore le dernier cas :

11° $$y^6 = g(x - a)^3(x - a_1)^4(x - a_2)^5.$$

On aura

$$A_a = \tfrac{1}{2}(6 \times 3 - 6 - 3 + 3) = 6,$$
$$A_{a_1} = \tfrac{1}{2}(6 \times 4 - 6 - 4 + 2) = 8,$$
$$A_{a_2} = \tfrac{1}{2}(6 \times 5 - 6 - 5 + 1) = 10.$$

Rendons l'équation homogène, et faisons ensuite $y = 1$,

$$t^6 = g(x - at)^3(x - a_1 t)^4(x - a_2 t)^5.$$

Les termes du degré le moins élevé sont

$$t^6 - gx^{12},$$

ce qui donnera pour le nombre de conditions

$$\tfrac{1}{2}(6 \times 12 - 6 - 12 + 6) = 30.$$

Ainsi

$$A = 6 + 8 + 10 + 30 = 54,$$

ce qui est bien la valeur de $\frac{1}{2}m(m-3)$ pour $m = 12$.

Remarquons à ce propos combien l'étude des intégrales qui nous occupent est facilitée par l'existence de ces points singuliers. Si une courbe possédait en effet cinquante-quatre points doubles distincts, il

serait à peu près impossible de calculer leurs coordonnées et le nombre de conditions correspondantes.

**28.** Considérons l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 + 3u^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + (u^2-1)^2 - 4u^6 = 0.$$

MM. Briot et Bouquet ont prouvé que l'intégrale est monodrome et doublement périodique [1].

Cherchons les points singuliers de la courbe

$$F(x,y) = y^3 + 3x^2y^2 - (x^2-1)^2 - 4x^6 = 0.$$

On a

$$F'_y = 3y^2 + 6x^2y, \quad F'_x = 6xy^2 - 4x(x^2-1) - 24x^5.$$

La première de ces équations admet la solution $y = 0$, et la seconde donne $x = 0$ ou bien $6x^4 + x^2 - 1 = 0$.

La solution $y = 0$, $x = 0$ ne convient pas, puisque la courbe ne passe pas par l'origine des coordonnées. Voyons l'autre : $y = 0$ avec $6x^4 + x^2 - 1 = 0$. L'équation proposée donne, pour $y = 0$, $4x^6 + (x^2-1)^2 = 0$. On s'assure aisément que les deux équations en $x$ n'admettent pas de racines communes.

Reprenons l'équation $F'_y = 0$, qui est satisfaite pour $y = -x^2$. Substituant dans F, on trouve $-(x^2-1)^2$, et dans $F'_x$, on trouve $-2(x^2-1)$. Il y a donc deux points multiples à distance finie $x = \pm 1$, $y = -2$. On vérifie en transportant l'origine en chacun de ces points que ce sont des points doubles ordinaires.

Rendons l'équation homogène :

$$y^3t^3 + 3x^2y^2t^2 - (x^2-t^2)^2t^2 - 4x^6 = 0.$$

Pour $t = 0$, on a $x = 0$. Faisons $y = 1$, il viendra

$$t^3 + 3x^2t^2 - (x^2-t^2)^2t^2 - 4x^6 = 0.$$

Ce point a été étudié au n° 21; il exige sept conditions. On a donc

$$A = 7 + 2 = 9.$$

C'est la valeur de $\frac{1}{2}m(m-3)$ pour $m = 6$.

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 414.

29. Soit encore l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 - \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \tfrac{4}{27}(1 - 2u^2 + 2u^3)^2 + \tfrac{4}{27} = 0.$$

dont l'intégrale est monodrome et simplement périodique [1].

Considérons la courbe

$$F(x, y) = y^3 - y^2 - \tfrac{4}{27}(1 - 2x^2 + 2x^3)^2 + \tfrac{4}{27} = 0.$$

On a

$$F'_x = -\tfrac{8}{27}(1 - 2x^2 + 2x^3)(6x^2 - 4x), \quad F'_y = 3y^2 - 2y.$$

On voit aisément que les seules valeurs de $x$ et $y$ satisfaisant à la fois aux trois équations sont

$$x = 0 \quad \text{avec} \quad y = 0$$

et

$$1 - 2x^2 + 2x^3 = 0 \quad \text{avec} \quad y = \tfrac{2}{3}.$$

En transportant successivement l'origine en ces quatre points, on s'assure que ce sont des points doubles ordinaires.

Rendons l'équation homogène, on aura

$$y^3 t^3 - y^2 t^4 - -\tfrac{4}{27}(t^3 - 2tx^2 + 2x^3)^2 + \tfrac{4}{24} t^6 = 0.$$

Pour $t = 0$, on a $x = 0$. Faisons $y = 1$, on aura

$$t^3 - t^4 - \tfrac{4}{27}(t^3 - 2tx^2 + 2x^3)^2 + \tfrac{4}{27} t^6 = 0.$$

Les termes du moindre degré sont

$$t^3 - \tfrac{16}{27} x^6.$$

Le nombre des conditions correspondantes est donc

$$\tfrac{1}{2}(3 \times 6 - 6 - 3 + 3) = 6;$$

donc

$$A = 4 + 6 = 10.$$

C'est la valeur de $\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$ pour $m = 6$.

On en conclut que la courbe représentée par l'équation $F(x, y) = 0$ est unicursale.

---

[1] *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 396.

*Courbes du troisième et du quatrième degré.*

Quand la courbe $F(x, y) = 0$ est du troisième ou du quatrième degré, on peut vérifier, par une substitution simple, quelques-unes des propriétés démontrées dans la théorie générale.

**30.** Si la courbe est du troisième degré et n'a pas de point double, le nombre des intégrales de première espèce est égal à l'unité.

Écrivons l'équation sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x, y) = x^3 + (ay + b)x^2 + (cy^2 + dy + e)x \\ \qquad\qquad + (fy^2 + gy + h)(y - \beta) = 0, \end{cases}$$

en mettant en évidence dans le terme constant une quelconque des racines $\beta$. Posons

$$(2)\qquad x = (y - \beta)x',$$

$$(3)\qquad F(x, y) = (y - \beta)f(x', y),$$

$f(x', y)$ est un trinôme du second degré en $y$.

$$(4)\qquad f(x', y) = My^2 + Ny + P,$$

où les coefficients M, N, P ont les valeurs suivantes :

$$M = x'^3 + ax'^2 + cx' + f,$$
$$N = -2\beta x'^3 + (b - a\beta)x'^2 + dx' + g,$$
$$P = \beta^2 x'^3 - b\beta x'^2 + ex' + h.$$

Désignons par R la quantité $N^2 - 4MP$. On s'assure immédiatement que R est un polynôme du quatrième degré en $x'$. L'équation $f(x', y) = 0$ donnera alors pour $y$ une fonction rationnelle de $x'$ et de $\sqrt{R}$. Il en sera de même de $x$ d'après la formule (2), et, par suite, de $dx$.

Toutes les intégrales dans lesquelles le coefficient différentiel sera une fonction rationnelle de $x$ et $y$ se ramèneront donc à d'autres où le coefficient différentiel sera une fonction rationnelle de $x'$ et $\sqrt{R}$. On pourra, par suite, les exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques et les intégrales elliptiques des trois espèces.

Par exemple, on réduira de cette façon les intégrales où le coefficient différentiel est une fonction rationnelle de $x$ et $\sqrt[3]{P}$, P étant un polynôme du troisième degré au plus. Si $P = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)$, on choisira naturellement la substitution $y = (x-a)y'$ pour réduire l'équation $y^3 = (x-a)(x-a_1)(x-a_2)$ au deuxième degré en $x$.

31. Les intégrales elliptiques disparaîtraient si le polynôme qui est soumis au radical se réduisait au second degré. Cela peut se présenter de deux manières : ou bien le polynôme R contient un facteur double qui sort du radical, ou bien dans ce polynôme, les termes du troisième et du quatrième degré ont un coefficient nul. Je n'examinerai que le premier cas qui est le plus général, et je dis que la courbe aura un point double.

Par la décomposition en carrés, l'équation (4) peut s'écrire ainsi

$$f(x', y) = M\left[\left(y + \frac{N}{2M}\right)^2 - \frac{R}{4M^2}\right].$$

Il est clair que, si R contient le facteur $(x' - x'_0)^2$, la courbe $f(x', y) = 0$ présentera un point double dont les coordonnées seront

$$x' = x'_0 \quad \text{et} \quad y = -\left[\frac{N}{2M}\right]_{x'=x'_0}:$$

en sorte que pour ces coordonnées les deux dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x', y)$ doivent s'annuler. Or, en en différentiant les formules (3), on aura

$$F'_x(x, y) = (y - \beta) f'_{x'}(x', y) \frac{1}{y - \beta} = f'_{x'}(x', y),$$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= (y - \beta)\left[f'_y(x', y) - \frac{x}{(y-\beta)^2} f'_{x'}(x', y)\right] \\ &= (y - \beta) f'_y(x', y) - x' f'_{x'}(x', y). \end{aligned}$$

Ces formules montrent que les deux dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ s'annulent en même temps que celles de $f(x', y)$. La courbe $F(x, y) = 0$ admettra donc un point double.

**32.** L'intégrale de première espèce, dans le cas d'une courbe du troisième degré quelconque, est

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{C\,dx}{F'_y(x, y)},$$

où C est une constante.

Reprenons la transformation $x = (y - \beta)\,x'$, d'où

$$dx = (y - \beta)\,dx' + x'\,dy,$$

on aura

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\left(y - \beta + x'\dfrac{dy}{dx'}\right)dx'}{(y - \beta)\,f'_y(x', y) - x'\,f'_{x'}(x', y)},$$

et comme

$$\frac{dy}{dx'} = -\frac{f'_{x'}(x', y)}{f'_y(x', y)},$$

l'intégrale deviendra

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\,dx'}{f'_y(x', y)};$$

Or

$$f(x', y) = My^2 + Ny + P,$$
$$f'_y(x', y) = 2My + N = \sqrt{R};$$

donc enfin

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\,dx'}{\sqrt{R}}.$$

On en conclut que $x'$ sera une fonction monodrome et doublement périodique de $z$. Il en sera de même de $\frac{1}{C}\sqrt{R}$, qui est la dérivée de $x'$. Mais $y$ est une fonction rationnelle de $x'$ et de $\sqrt{R}$; il aura donc la même propriété que $x'$. Enfin il en sera de même de $x$, à cause de la relation $x = (y - \beta)\,x'$.

**33.** Reprenons l'intégrale de première espèce

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{U}, \quad \text{où} \quad U = F'_y(x, y),$$

en supposant égale à l'unité, pour simplifier, la constante qui provient de $N(x, y)$, et ordonnons l'équation de la courbe par rapport à $y$.

$$F(x, y) = y^3 + Ay^2 + By + C = 0.$$

A, B, C sont des polynômes en $x$, dont les degrés sont au plus 1, 2, 3. Proposons-nous de trouver la relation qui existe entre $x$ et U. On aura

$$U = F'_y(x, y) = 3y^2 + 2Ay + B.$$

L'élimination de $y$ entre cette équation et $F(x, y) = 0$ donne

$$(AU + 9C - AB)^2 = (3U + 6B - 2A^2)(U^2 + BU + 6AC - 2B^2),$$

ou en ordonnant

$$(5) \qquad U^3 + (3B - A^2)U^2 + 18ABC + A^2B^2 - 4B^3 - 4A^3C - 27C^2 = 0.$$

Ainsi, A étant un polynôme quelconque du premier degré, B du second, C du troisième, l'équation (5) aura une intégrale monodrome et doublement périodique.

On peut constater aisément que cette équation satisfait aux conditions données par MM. Briot et Bouquet. (*Théorie des fonctions elliptiques*, p. 381 et suiv.)

Si l'on cherche la condition pour que l'équation (5) ait une racine double, on trouve

$$4(3B - A^2)^3 + 27(18ABC + A^2B^2 - 4B^3 - 4A^3C - 27C^2) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(2A^3 - 9AB + 27C)^2.$$

Représentons par 3F le polynôme $3B - A^2$ (ce qui revient à supposer A nul); on mettra alors l'équation (5) sous la forme

$$U^3 + 3FU - 4F^3 + 27G^2 = 0,$$

où G est un polynôme du troisième degré et F un polynôme du second degré. C'est précisément l'équation trouvée par MM. Briot et Bouquet, comme la plus générale du troisième degré susceptible d'une intégrale monodrome et doublement périodique.

*Courbes du quatrième degré.*

34. Le nombre des intégrales de première espèce sera l'unité si $A = \frac{1}{2}.4(4-3) = 2$. La courbe aura alors deux points doubles ou un point de rebroussement de deuxième espèce; elle sera unicursale si $A = 3$.

Dans le premier cas, prenons comme axe des $y$ la droite joignant les deux points doubles, et comme origine l'un de ces points; l'équation aura cette forme

$$\begin{aligned} F(x,y) = x^4 + (ay+b)x^3 + (cy^2+dy+e)x^2 \\ + (fy+g)y(y-\beta)x + h^2y^2(y-\beta)^2 = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$x = (y-\beta)x',$$

on aura

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (y-\beta)^2 f(x',y), \\ f(x',y) &= My^2 + Ny + P, \end{aligned}$$

où M, N, P ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} M &= x'^4 + ax'^3 + cx'^2 + fx' + h, \\ N &= -2\beta x'^4 + (b-a\beta)x'^3 + dx'^2 + gx', \\ P &= \beta^2 x'^4 - b\beta x'^3 + ex'^2. \end{aligned}$$

Si l'on forme la quantité $N^2 - 4MP$, on voit que les coefficients de $x'^8$ et de $x'^7$ sont nuls; en outre, l'expression qui reste est divisible par $x'^2$. On pourra donc poser

$$N^2 - 4MP = x'^2 R,$$

R étant un polynôme du quatrième degré. En cherchant les valeurs de $y$ en $x'$, on aura

$$y = \frac{-N \pm x'\sqrt{R}}{2M}.$$

A cause de la relation $x = (y-\beta)x'$, on voit que toutes les intégrales où le coefficient différentiel sera une fonction de $x$ et $y$ se ramèneront à d'autres où le coefficient de $dx'$ sera une fonction rationnelle

de $x'$ et $\sqrt{R}$, en sorte qu'elles se réduiront aux fonctions élémentaires et aux trois intégrales elliptiques.

On verra, comme pour les courbes du troisième degré, que R ne peut admettre un facteur double que si la courbe $f(x', y) = 0$, et par suite la courbe proposée, présente un autre point double.

35. Pour obtenir l'intégrale de première espèce, on remarquera que la fonction $N(x, y)$ est ici du premier degré. En l'égalant à zéro, on obtient une droite, et les deux conditions consistent ici à faire passer la droite par les deux points doubles, c'est-à-dire à la faire coïncider avec l'axe $Oy$. On aura donc

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{Cx\,dx}{F'_y(x, y)}.$$

Prenons encore la transformation

$$x = (y - \beta)x', \quad F(x, y) = (y - \beta)^2 f(x', y),$$

on aura

$$dx = (y - \beta)\,dx' + x'dy = \left(y - \beta - \frac{x}{y - \beta}\,\frac{\frac{df}{dx'}}{\frac{df}{dy}}\right)dx'$$

ou

$$dx = \left[(y - \beta)^2 \frac{df}{dy} - x\,\frac{df}{dx'}\right] \frac{dx'}{(y - \beta)\frac{df}{dy}}.$$

On a maintenant

$$F'_y = (y - \beta)^2 \left[\frac{-x}{(y - \beta)^2}\,\frac{df}{dx'} + \frac{df}{dy}\right] = -x\frac{df}{dx'} + (y - \beta)^2 \frac{df}{dy},$$

en remarquant que $f(x', y)$ est nul pour les valeurs de $y$ que nous considérons. L'intégrale deviendra alors

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{Cx'dx'}{f'_y(x', y)};$$

or

$$f'_y(x', y) = 2My + N = x'\sqrt{R};$$

donc enfin

$$z = \int_{x'_0}^{x'} \frac{C\,dx'}{\sqrt{R}},$$

d'où l'on conclura que $x'$ et, par suite, $y$ et $x$ sont des fonctions monodromes et doublement périodiques de $z$.

36. Si la courbe proposée $F(x, y) = 0$ a trois points doubles, elle est unicursale. Remarquons d'abord que ces trois points ne peuvent être en ligne droite, la courbe étant seulement du quatrième ordre. En les supposant tous trois à distance finie, je les choisis comme sommets d'un triangle de référence.

On exprimera dans l'équation générale du quatrième ordre homogène et à trois variables que les sommets du triangle sont des points doubles, et l'on arrivera immédiatement à l'équation

$$ay^2z^2 + bx^2z^2 + cx^2y^2 = xyz(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

En résolvant par rapport à $y$, on aura

$$y = \frac{-xz(\alpha x + \gamma z) \pm xz\sqrt{(\alpha x + \gamma z)^2 - 4b(az^2 + cx^2 - \beta xz)}}{2(az^2 + cx^2 - \beta xz)}.$$

Si l'on remplace $z$ par 1, on substituera à la courbe une de ses projections coniques. L'ordonnée de la nouvelle courbe s'exprimera en fonction de l'abscisse par une formule qui ne contient d'autre irrationnelle qu'un radical carré portant sur un trinôme du second degré. Les intégrales dont le coefficient différentiel sera une fonction rationnelle de $x$ et $y$ se réduiront donc aux fonctions élémentaires.

37. Si, dans l'équation $F(x, y) = 0$ du n° 34, on fait tendre $\beta$ vers zéro, l'origine devient, comme on le voit immédiatement, un point de rebroussement de deuxième espèce. La droite $N(x, y) = 0$ doit être dirigée dans ce cas suivant la tangente de rebroussement.

Nous avons déjà remarqué que la courbe

$$y^2 = g(x - a)(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$$

n'a pas de points multiples à distance finie et possède à l'infini un point

de rebroussement de deuxième espèce. La fonction $N(x, y) = 0$ se réduira alors à une constante, et l'intégrale de première espèce sera

$$\int \frac{C\,dx}{y} = \int \frac{C\,dx}{\sqrt{g(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}.$$

C'est l'intégrale qui sert de point de départ à la théorie des fonctions elliptiques.

# ÉTUDE

SUR LES

# FOSSILES TERTIAIRES DE L'ILE DE COS

RECUEILLIS PAR M. GORCEIX EN 1873,

PAR M. TOURNOÜER [1].

M. Gorceix a bien voulu me confier l'étude des divers fossiles tertiaires qu'il a recueillis dans son exploration géologique de l'île de Cos en 1873. Ces fossiles se recommandaient à toute mon attention.

Edw. Forbes, en effet, il y a longtemps déjà, dans une petite Note incidente, intercalée dans la relation de son Voyage géologique en Lycie (SPRATT *and* FORBES, *Travels in Lycia*. London, 1847; *vide* p. 199 et suiv.), avait signalé dans l'île de Cos une importante formation

[1] La publication du présent travail, qui devait paraître en 1875, ayant été retardée par suite de circonstances indépendantes de la volonté de l'auteur et de l'éditeur et relatives à la confection des planches, ce retard me permet de dire que, depuis le voyage de M. Gorceix, M. le professeur Neumayr a visité l'île de Cos dans le printemps de l'année 1875 et a donné, à la fin de la même année, une Note sommaire sur les résultats de ses observations dans les *Verhandlungen der Geol. Reichsanstalt* (1875, n° 10), en attendant la publication complète de son Voyage. M. Th. Fuchs visitait en même temps une partie de la Grèce et a donné également une première Note sur les résultats de ses recherches dans les *Kaiserl. Akad. der Wissensch.* de janvier 1876. De plus, il a paru récemment un important et très-intéressant travail de MM. Neumayr et Paul sur les couches à Congéries et à Paludines de l'Esclavonie (*Die Congerien und Paludinenschichten Slavoniens*, Wien, 1875), dans lequel il est parlé incidemment de quelques fossiles de Cos. Ces publications et celles qui sont annoncées ne peuvent manquer de jeter beaucoup de jour sur plusieurs des questions touchées dans le présent travail, qui aurait gagné sans doute à attendre encore; je le donne néanmoins aujourd'hui tel qu'il avait été préparé, sur les seuls documents et matériaux qui m'avaient été fournis par M. Gorceix, pour laisser plus entière à chacun la part qui doit lui revenir dans l'histoire géologique et paléontologique de l'île de Cos. (*Note de l'auteur*).

d'eau douce, riche en coquilles fossiles, contre laquelle venait buter, en stratification horizontale et discordante, une formation marine qu'il identifiait avec celles de Rhodes et de la Sicile, et qu'il rattachait au pliocène supérieur, *newer pliocene beds*. Il en concluait que la formation d'eau douce devait être regardée « au moins comme de l'ancien pliocène ». Considérée en elle-même, cette formation d'eau douce de Cos se subdivise, d'après Forbes, en trois horizons, et les nombreuses coquilles fossiles qu'elle contient se distribuent en trois séries successives, *a*, *b*, *c*, dont chacune est caractérisée par une forme particulière de *Paludine* et de *Néritine*, absente dans les deux autres : dans le niveau inférieur, les coquilles sont lisses; dans le niveau moyen, elles sont ceintes d'un gros bourrelet unique; et, dans le niveau supérieur, elles sont profondément sillonnées et entourées de plusieurs forts bourrelets en spirale. Pour expliquer ces différences dans un espace de temps aussi restreint que celui qui est circonscrit par ce dépôt, Forbes ne pense pas qu'il soit nécessaire de recourir à l'hypothèse de trois créations distinctes; il pense, au contraire, que ces variations de formes dans les espèces associées peuvent s'expliquer par les changements de milieu et par l'invasion progressive des eaux salées de la mer pliocène dans l'ancien bassin d'eau douce. Telle est, en résumé, la Note de Forbes, Note très-courte, de quelques pages, sans listes ni descriptions de fossiles, avec un petit croquis schématique du terrain et cinq ou six figures au trait de coquilles caractéristiques; mais Note substantielle dans sa brièveté et soulevant plusieurs questions intéressantes de géologie méditerranéenne et de zoologie générale.

Depuis le voyage de Forbes jusqu'à celui de M. Gorceix, pendant l'espace de près de trente ans, rien n'a été dit, à ma connaissance, sur l'île de Cos; aucun géologue ne l'a visitée, ou du moins aucun n'en a parlé spécialement. L'amiral Spratt, seul, a parlé très-incidemment des dépôts lacustres et des coquilles fossiles de Cos et de la région grecque, dans son Voyage en Crète (*Travels and Researches in Crete*, 1865). On conçoit donc l'intérêt qui s'attache à l'étude des fossiles rapportés par M. Gorceix, pour éclairer les questions posées par l'éminent naturaliste anglais.

C'est ainsi que Forbes n'avait pas pu préciser l'âge des dépôts lacustres de Cos autrement qu'en disant : qu'ils étaient plus anciens que les

dépôts marins pliocènes; mais jusqu'où pouvaient-ils remonter? Les matériaux de comparaison qui lui manquaient pour apprécier la signification chronologique de cette faune, d'une physionomie si originale et si particulière, ne nous manquent plus maintenant. Toute une grande faune lacustre, des plus riches et des plus intéressantes, à laquelle se rattache la faune locale de Cos, a été révélée dans ces dernières années par les excellents travaux des géologues autrichiens : c'est la faune des *couches à Paludines* du bassin du Danube, et en particulier de l'Esclavonie et de la Croatie, qui termine la série complexe des dépôts d'eau douce et des dépôts d'eau saumâtre qui, dans le centre et l'est de l'Europe, ont succédé eux-mêmes aux derniers dépôts de la mer miocène. Au premier coup d'œil jeté sur les coquilles lacustres de Cos rapportées par M. Gorceix, j'ai pu reconnaître, non-seulement les types principaux signalés et figurés par Forbes, mais des types tellement voisins de ceux de l'Esclavonie et de la Croatie qu'aucun paléontologiste ne peut hésiter à les rattacher à la même faune et au même horizon; et j'ai pu affirmer, à la suite des premières communications de M. Gorceix [1], que les couches lacustres de Cos ne sont qu'une extension dans l'Archipel grec des *couches à Paludines* du bassin du Danube.

Ce premier point important, que faisait pressentir d'ailleurs la vue des quelques figures données par Forbes en 1847, étant bien établi à l'aide des nombreux documents recueillis par M. Gorceix, il y a beaucoup d'intérêt à étudier aussi la faune marine qui surmonte la formation d'eau douce de l'île. En effet, si dans le centre de l'Europe on connaît bien le substratum des *couches à Paludines* qui sont supérieures aux *couches à Congéries*, en revanche on ne voit rien au-dessus, la mer n'ayant pas reparu dans ces parties de l'Europe depuis la fin des temps miocènes. Au contraire, à Cos, on a l'heureuse chance de voir ces dépôts lacustres recouverts par des dépôts à coquilles marines. Quelles sont ces coquilles? Quel est l'âge au juste de ces dépôts? Forbes les a rattachés, en quelques lignes, au pliocène récent; et, autant du moins que j'en puis juger par les matériaux de M. Gorceix, je crois que Forbes a eu raison, comme je le montrerai plus loin. Le système général des *couches à Paludines* est donc comp is entre les *couches à Congéries* de

---

(1) *Bulletin de la Société géologique de F ance*, 3e série, t. II, p. 398; juin 1874.

l'Esclavonie et le *pliocène supérieur* de Cos et de l'Archipel; il peut donc être égal à l'*ancien pliocène*.

Reste le fait, si intéressant au point de vue paléontologique et de la théorie de la descendance des espèces, signalé par Forbes, à savoir le fait de la distribution des coquilles lacustres de Cos en trois zones successives, caractérisées chacune par un mode d'ornementation particulier, de plus en plus riche, qui affecte également les espèces des différents genres, Paludines, Néritines, Mélanopsides, etc., à mesure qu'elles entrent dans la même zône.

Malheureusement, sur ce fait si curieux et si positivement affirmé par Forbes, les observations de M. Gorceix font complétement défaut; il a recueilli les types divers de Forbes, les formes lisses, les formes unicarénées, les formes multicarénées; mais, préoccupé d'autres questions, il a négligé de noter les différents niveaux des différentes espèces et son étude géologique de l'île ne donne à cet égard aucune de ces indications de stratigraphie détaillée qui sont maintenant le fil conducteur de toute étude paléontologique. Il y a là une lacune regrettable, qui sera comblée sans doute par d'autres observateurs, mais qui m'empêche de tirer tout le parti que j'espérais de l'étude de ces curieux matériaux et qui borne à peu près mon rôle à la tâche de déterminer et de faire connaître par des descriptions, et surtout par de bonnes figures, les espèces recueillies.

Quant à l'hypothèse de Forbes, je la considère, en tout cas, comme inadmissible maintenant, comme insuffisante du moins pour expliquer des faits beaucoup plus généraux que Forbes ne pouvait le croire. M. Gorceix a cru trouver un argument à l'appui de cette hypothèse dans le fait du mélange d'espèces d'eau douce et d'espèces marines qu'il a observé dans le centre de l'île; je ne crois pas qu'il ait raison. Sans avoir été sur les lieux, je crois qu'il n'y a là qu'un fait de remaniement, ou qu'un fait de mélange accidentel par l'apport des eaux fluviatiles voisines, analogue à une foule de faits semblables qu'on observe dans les terrains tertiaires, par exemple dans les faluns littoraux de Dax ou de la Touraine, etc., etc.

Ces réserves faites, je vais passer en revue les espèces recueillies par M. Gorceix, espèces d'eau douce et espèces marines. Pour les premières, j'ai déjà donné ailleurs (*Journal de Conchyliologie*, 3e série, t. XV, nos 1

et 2. Paris, janvier et avril 1875) les diagnoses des types principaux, pour assurer à notre compatriote, le premier venu dans l'île depuis le voyage de Forbes, la priorité qui lui revenait de droit dans la publication de ces découvertes.

### *Espèces de la formation d'eau douce.*

A défaut d'indications stratigraphiques détaillées sur le gisement des espèces, je vais en donner la liste avec les indications topographiques que m'a remises M. Gorceix, et celle du degré de fréquence ou de rareté qu'elles avaient dans sa collection. Le petit bassin isolé du cap Képhalos dans le sud-ouest de l'île, très-pauvre en fossiles, peut être négligé. C'est la pointe nord-est de l'île, entre la ville de Cos et le cap Fouka, qui montre toute la puissance et la richesse fossilifères de cette formation d'eau douce et qui en fera un point classique d'observation pour ces terrains dans l'est de la Méditerranée ; plus au centre de l'île, le ravin du col de Pylli est très-riche aussi. C'est de ces deux localités que proviennent presque tous les fossiles, dont voici la liste :

1. *Planorbis Thiollierei*, Michaud? — Calcaires marneux gris, du ravin de Castagna, à l'ouest de Képhalos.
2. *Limnæa Coa*, Tournoüer. — Calcaires marneux sous l'église de Saint-Georges, près de Cos, commun.
3. *Melania tuberculata*, Müll. — Fouka, Pylli, a. r.
4. *Melanopsis Sporadum*, nov. sp. — Fouka, c. c.
5. » *Gorceixi*, Tourn. — Fouka, type et var. c. c. — Pylli, c.
6. » *Proteus*, Tourn. — Pylli, c. c. c. — Fouka, r. r.
7. » *Ægæa*, Tourn. — Fouka, c. c.
8. » *costata*, Férussac. — Antimaki.
9. » *cariosa*, Linné. — Ibid.
10. » *Delessei*, Tourn. — Pylli, c. c. — Fouka, r.
11. *Hydrobia slavonica*, Brusina? — Fouka.
12. *Pyrgula? Brusinai*, Tourn. — Calcaires de Saint-Georges, près de Cos, c.
13. *Paludina Brusinai*, Neumayr? — Fouka, c. c. c.
14. » sp? » — Ibid., r.
15. » *Forbesi*, Tourn. — Ibid., c.
16. » *Munieri*, nov. sp. — Ibid., r.
17. » *Gorceixi*, Tourn. — Ibid., c. c.
18. » *Coa*, Tourn. — Ibid., c. c.
19. » *trochlearis*, Tourn. — Ibid.? r.

20. *Neritina abnormis*, Jenkins? var. *a* — Col. de Pylli, c. c. c.
21. » » » var. *b* — Marnes blanches du cap Fouka, c. c.
22. *Dreyssensia*, sp.? — Calcaires marneux de Saint-Georges.
23. *Unio*, sp.? — Pylli, r.

On ne retrouve pas dans cette liste deux genres cités cependant par Forbes : *Valvata* et *Cyclas*.

On voit que, d'après les recherches du moins de M. Gorceix, toutes les *Paludines* appartiennent aux couches marneuses blanches du cap Fouka et des environs de Cos; la *Melanopsis Ægœa*, la petite *Neritina abnormis*, les petites *Hydrobia*, appartiennent exclusivement aussi aux mêmes couches. L'unique *Limnée* et l'unique espèce de *Congérie* ou *Dreyssène* proviennent aussi des environs de Cos et de couches calcaires particulières. Les *Melanopsis Proteus* et *Delessei* sont très-abondantes dans les argiles de Pylli; la grosse *Neritina Spratti* ne se trouve que là. Les deux *Melanopsis cariosa* et *costata* n'ont été recueillies que près d'Antimaki.

Le grand *Planorbis Thiollierei?* ne se trouve que dans le bassin isolé de Kéfalos, qui est peut-être d'un autre âge que celui du nord de l'île.

### Planorbis Thiollierei, Michaud?

Les calcaires de Kéfalos renferment en abondance un grand Planorbe qui est de la taille du *P. Thiollierei* des marnes de Hauterives (Drôme), et qui paraît avoir, comme celui-ci, les tours biseautés en dessous. Cependant, à cause de l'état d'écrasement des échantillons, je ne puis pas affirmer cette identité. Je n'ai trouvé aucun Planorbe, ni petit ni grand, dans les marnes à Paludines du nord de l'île qui semblent être des dépôts fluviatiles plutôt que des dépôts lacustres; en tout cas, des dépôts faits sous des eaux non marécageuses. Les Planorbes sont d'ailleurs très-rares dans l'ensemble des couches à Paludines du bassin du Danube.

### Limnæa Coa, Tournoüer.

(*Pl. IV, fig.* 1.)

*Limnæa Cosensis* (Tournouer, *Journal Conch.*, 3e série, t. XV, p. 76; janvier 1875).

Je change le nom de *Cosensis* en celui plus classique de *Coa*. Cette espèce curieuse, la seule du genre que j'aie vue de Cos, remarquable

par ses tours tordus, son test robuste, son épaisse callosité columellaire (je ne connais pas le bord extérieur de la bouche), est commune dans des blocs de calcaire marneux, très-tendre, que M. Gorceix a recueillis sous l'église Saint-Georges, près de la ville de Cos. C'est un type particulier qui n'a rien d'européen, que je ne connais en Europe ni avant ni depuis l'époque des couches à Paludines. M. Neumayer a décrit des couches similaires de l'Esclavonie un *Limnœus acuarius*, fort singulier aussi, et qu'il a pu rapprocher du type nord-américain des *Acella* (*A. gracilis*), à cause de sa forme effilée et de l'étroitesse de sa bouche. La Limnée de Cos s'éloigne au contraire de ce type par la rondeur de ses tours, l'épaisseur de sa coquille, etc.

### **Melania tuberculata**, Müller

(*Pl. IV, fig.* 3 et 3ᵃ.)

Les quelques échantillons que j'ai sous les yeux et qui proviennent, les uns des marnes à Paludines de Fouka, et les autres des marnes brunes à *Melanopsis Delessei* de Pylli, sont tous petits et très-ornementés, les côtes longitudinales, peu obliques, étant traversées par des plis transversaux très-sensibles. Ils s'éloignent ainsi à la fois du type de la *M. curvicosta*, Desh., fossile du pliocène de Rhodes et d'Italie, et du grand type vivant en Algérie.

En comprenant dans le type *tuberculata* la *M. curvicosta*, on voit que c'est le type de Mélanie qui a succédé en Europe au type miocène plus tropical de la *M. Escheri*, et c'est aujourd'hui le seul représentant du genre dans le système malacologique européen, où les Mélanies ont été si communes pendant l'époque éocène. C'est même un type visiblement en retrait, puisque, dans le pliocène et dans le mio-pliocène, on le trouve encore répandu au nord de la Méditerranée, en Italie, dans la vallée du Rhône (couches à Congéries de Bollène, Mayer), tandis qu'il est aujourd'hui relégué sur les frontières de notre système, en Algérie, dans les oasis du Sahara, en Égypte, en Syrie, en Perse, etc., d'où il s'étend même plus à l'est jusqu'aux Indes orientales. Du côté de l'ouest, M. Morelet l'a signalé à l'état fossile aux îles du cap Vert, où il est maintenant inconnu.

La *M. tuberculata* n'a pas encore été indiquée, que je sache, dans les couches à Paludines du centre de l'Europe.

## MELANOPSIS.

Le genre *Melanopsis*, si singulièrement cantonné aujourd'hui en Europe et en Nouvelle-Calédonie, caractéristique du système européen où il est d'une grande antiquité géologique (terrains wealdiens), et où il est encore richement représenté, quoiqu'en retrait déjà sur son ancienne diffusion aux temps tertiaires, s'est maintenu d'abord et pendant toute la durée de l'époque éocène, dans des formes très-simples, souvent très-rapprochées de la *M. prærosa* de Linné, type actuel et vulgaire du genre.

A partir du miocène, on voit les formes spécifiques se diversifier et tendre déjà, en outre de la forme originelle, vers deux types bien distincts : d'un côté, par la *M. Aquensis* de Dax, vers le type occidental ou type caréné des *M. Maroccana*, *Dufouri*, etc., de l'Espagne et du Maroc; de l'autre, par la *M. cytharella*, etc., vers le type côtelé, aujourd'hui divisé entre l'Orient (*M. costata*) et l'Occident de la Méditerranée (*M. cariosa*, etc.). A la fin de cette époque miocène, à partir des couches à Congéries et dans les couches à Paludines, on voit le genre prendre tout à coup un développement extraordinaire et arriver à son apogée, comme on peut en juger par les nombreuses et curieuses espèces qui ont été figurées par Hörnes, Neumayr, Fuchs, Brusina, etc.

Les Mélanopsides du lambeau tertiaire de l'île de Cos témoignent de cette richesse du genre à ce moment de son histoire, non-seulement par le nombre des individus, mais aussi par la variété des types. On y trouve en effet réunis, dans un très-petit espace, les représentants des trois groupes européens :

Le groupe des Mélanopsides lisses;

Le groupe des Mélanopsides à côtes longitudinales;

Le groupe des Mélanopsides à carènes transversales.

Ces formes sont-elles synchroniques, ou ont-elles été successives, comme Forbes le donne à entendre, et dans quel ordre? C'est ce que je regrette de ne pas savoir.

**Melanopsis Sporadum**, nov. sp.

(*Pl. IV, fig.* 4 et 4ª.)

Ce type pourrait être confondu d'abord avec la *M. prærosa*. Il s'en distingue cependant pour moi certainement : il est plus étroit, plus élancé, la spire montre un plus grand nombre de tours; le dernier tour est moins grand proportionnellement, moins ovoïde, plus élargi vers la base; la bouche est plus petite. Par sa forme générale, ce type rappelle un peu celle des *Hemisinus* vivants et fossiles de l'Autriche (*H. Esperi*, *H. Sandbergeri*, etc.), mais il en diffère par sa bouche évasée et par son canal de vraie Mélanopside. Il se trouve fossile à Rhodes et probablement ailleurs dans le pays grec.

A Cos, il semble avoir été le type initial d'où sont sortis bon nombre des autres types de l'île, et d'abord le type suivant :

**Melanopsis Gorceixi**, Tournoüer.

(*Pl. IV, fig.* 5, *typus*, et *fig.* 5ª, *varietas.*)

1875. *Melanopsis Gorceixi* (Tournouer, *Journal de Conch., loc. cit.*, p. 76.)

Belle espèce, à base large, à forme bien conique, évidemment dérivée de la précédente. Le type à coquille lisse se trouve à la fois à Pylli et à Fouka.

La variété, plus étroite que le type, montre déjà sur les deux derniers tours quelques gros plis, cinq à sept, espacés et peu réguliers. Cette variété, que je trouve seulement dans les marnes blanches à Paludines, paraît avoir donné naissance elle-même, ou du moins elle se lie par des transitions aux deux formes suivantes : d'un côté à la *M. Ægæa* de Fouka, de l'autre à la *M. Proteus* de Pylli.

**Melanopsis Ægæa**, Tournoüer.

(*Pl. IV, fig.* 7 et 7ª.)

1875. *Melanopsis Ægea* (Tournouer, *Journal de Conch., loc. cit.*, p. 76.)

Cette Mélanopside est beaucoup plus petite, plus étroite, plus fortement côtelée qu'aucune variété de l'espèce précédente. Elle est ovoïde

et plus ou moins élancée ou plus ou moins courte; avec des tours ronds, tous ornés de très-fortes côtes longitudinales, assez espacées (huit à dix sur chaque tour), se continuant assez régulièrement d'un tour à l'autre et arquées sur le dernier tour. Je crois cette forme spéciale aux marnes farineuses à Paludines lisses du cap Fouka. Il n'y a rien de semblable dans la nature actuelle, ni même dans la faune contemporaine de l'Esclavonie.

### **Melanopsis Proteus**, Tournoüer.

(*Pl. IV, fig.* 6, 6$^a$, 6$^b$, 6$^c$.)

1875. *Melanopsis Proteus* (Tournouer, *Journal de Conch., loc. cit.*, p. 77.)

Je réunis sous ce nom les formes très-nombreuses d'une Mélanopside qui paraît être extrêmement abondante dans les couches de Pylli et qui est presque insaisissable dans sa variabilité; je prendrais pour type, comme également éloignée de ses extrêmes, la forme figurée en 6$^b$, qui est une coquille ovoïde, un peu élargie vers la base, et couverte sur toute sa surface de plis longitudinaux très-nombreux, serrés et très-réguliers. Cette forme moyenne se rattache d'un côté au type *Gorceixi* par des individus où les côtes sont moins nombreuses et plus irrégulières, comme celui figuré en 6$^a$ (il faudrait figurer tous les individus!), et de l'autre au type *costata*, par des individus dont les tours sont moins ronds et montrent une légère tendance à s'étager en retrait les uns sur les autres, comme dans l'*anceps* qui est du même groupe. Notre type a en effet des rapports avec deux autres types contemporains également polymorphes, comme l'indiquent leurs noms : la *M. anceps*, Gaudry et Fischer, de Mégare, et la *M. inconstans*, Neumayr, d'Esclavonie. Il ne se confond cependant avec aucune de leurs variétés : il est toujours plus grand, plus ovoïde et plus régulièrement plissé que l'*inconstans*, et toujours moins étroit, moins étagé, etc., que l'*anceps*.

Dans la faune vivante, la *M. Tingitana*, Morelet, du Maroc, est peut-être la seule qui rappelle un peu certaines variétés de l'espèce fossile de Cos.

**Melanopsis costata**, Férussac.

(*Pl. IV, fig.* 8.)

De la *M. Proteus* à la *M. costata*, la transition est assez brusque, puisque la forme intermédiaire de la *M. anceps* manque dans l'île de Cos, et que la *costata* s'y trouve typique, tout à fait conforme à celle qui vit aujourd'hui en Syrie, dans le lac de Tibériade, assez variable d'ailleurs. Elle n'a été recueillie par M. Gorceix que dans un seul lieu et dans une couche particulière, près d'Antimaki; un individu, plus petit et plus court que celui que je fais figurer, ressemble à la variété *abbreviata* d'Esclavonie figurée par M. Brusina. (*Foss. Binnen-Moll. aus Dalmatien, Pl. VII, fig.* 10.)

**Melanopsis cariosa**, Linné.

(*Pl. IV, fig.* 9.)

Avec la *M. costata* et au même lieu a été trouvée la forme à spire très-courte et à dernier tour dilaté, représentée par la *fig.* 9, et qui se rapporte certainement à la *M. cariosa* de Linné. La présence au même lieu de la *costata* et de la *cariosa* montre l'affinité de ces deux formes qui appartiennent à un seul et même type. Aujourd'hui la *costata* habite plus spécialement les eaux du Levant, quoiqu'elle se trouve aussi au Maroc (Morelet), et la *cariosa*, au contraire, est devenue une espèce occidentale de l'Andalousie et du Maroc; mais elle a habité sans doute toute la lisière du Sahara, puisqu'on vient de la retrouver fossile près des chotts de Tunisie (Fischer), et l'on peut ainsi remonter le chemin qu'elle a sans doute parcouru pour venir de ses stations primitives de la région grecque, où s'est trouvé, à l'époque dont nous nous occupons, le centre commun des deux formes aujourd'hui divisées.

**Melanopsis Delessei**, Tournoüer.

(*Pl. IV, fig.* 10, 10[a] et 10[b].)

1875. *Melanopsis* (*Lyrcea*) *Delessei* (TOURNOUER, *Journal de Conch., loc. cit.*, p. 77.)

Cette espèce représente seule à Cos le groupe de la *Maroccana* de Chemnitz (*M. Dufouri*, Fér., etc., etc.) qui a débuté dans les faluns de

Dax, ainsi que je l'ai dit, et qui s'est poursuivi dans le miocène supérieur de l'Italie et de la vallée du Rhône (*M. Narzolina*, etc.) et dans les couches à Congéries du Rhône (*M. Matheroni*) ou du Danube (*M. Martiniana* et ses riches variétés). M. Neumayr a figuré (1869) sous le nom de *Martiniana*, changé plus tard en *Maroccana* (in Brusina 1874), une espèce d'Esclavonie qui est du même groupe que la nôtre, mais qui s'en distingue à première vue par la position des carènes. L'espèce de Cos se rapprocherait davantage de la *Lyrcea cylindrica* de Stoliczka, du même horizon; mais elle s'en distingue aussi par la présence constante d'une carène au moins, par le moindre développement de sa callosité columellaire, etc.

L'espèce se trouve en très-grande abondance au col de Pylli, et nous avons pu la faire figurer à l'état très-adulte et à l'état très-jeune sous sa forme typique (*fig.* 10), cylindrique, avec une seule carène suturale ([1]), et sous ses formes de variétés 10[a] et 10[b], où l'on voit cette coquille cylindrique se déprimer de plus en plus au milieu du dernier tour et prendre finalement une seconde carène basale et une forme courte et trapue, assez sensiblement éloignée de la forme primitive. Ces modifications paraissent ici avoir été, non pas successives, mais parfaitement synchroniques.

Le type *Dufouri* est donc tout à fait en retrait maintenant en Europe, puisque, très-abondant à la fin du miocène dans le bassin du Danube, on le trouve encore au moment des couches à Paludines dans ce même bassin, dans l'Esclavonie, dans la Turquie d'Europe (*M. Lus-Hani*, d'Arch.), et à Cos, dans l'archipel grec, tandis qu'il est exclu aujourd'hui des contrées du Levant et confiné dans la province Hispanique, où il a trouvé d'ailleurs les conditions les plus favorables à son épanouissement.

**Melanopsis**, sp.?

(*Pl. IV, fig.* 11.)

J'ai fait figurer ici une forme qui se trouve quelquefois au même lieu avec la *M. Delessei*, et dont je ne sais trop que penser. Elle est inter-

---

([1]) La *M. Delessei* a presque toujours une forme plus cylindrique, une spire beaucoup plus déprimée et un bourrelet caréniforme plus épais que dans la *fig.* 10 de cette Planche.

médiaire entre une *Delessei* très-effacée et une *prærosa* non typique; l'état roulé des échantillons m'empêche de les apprécier en parfaite connaissance de cause.

### Hydrobia slavonica, Brusina?

La marne blanche à Néritines et à Paludines du cap Fouka est quelquefois criblée d'empreintes d'une très-petite coquille turriculée, qui y a rarement laissé son test à peu près intact, et que je crois pouvoir rapporter à l'*Hydrobia slavonica*, Brusina (*Foss. Binnens Moll.*, etc., 1874.) Je ne suis pas sûr cependant de cette détermination. La petite coquille de Cos me paraît avoir les tours plus ronds que l'*H. slavonica*, et elle ne mesure guère que 4 millimètres au plus de longueur, sur 1 $\frac{1}{2}$ de diamètre au dernier tour.

### Pyrgula? Brusinai, Tournoüer.

(*Pl. IV, fig.* 2.)

J'ai donné, dans le *Journal de Conchyliologie* (2e série, t. XV, p. 167, 1875), la diagnose de la petite coquille que je fais figurer ici d'après des empreintes que j'ai trouvées sur un fragment de calcaire dur, provenant des environs de l'église Saint-Georges et qui renferme aussi des empreintes de grande Paludine. La détermination générique de cette coquille est pour moi très-douteuse, aucune de ces empreintes n'ayant conservé trace entière de l'ouverture, qui avait un péristome continu et un bord extérieur polygonal (ce détail n'a pas été bien rendu par le dessinateur). Mais j'ai cru utile de faire figurer cependant, malgré l'insuffisance de mes matériaux, cette coquille dont l'ornementation multicarénée est fort curieuse et m'a paru nouvelle : d'autres recherches compléteront peut-être plus tard et rectifieront ce que je puis en dire pour le moment.

## PALUDINA (VIVIPARA).

Comme le genre *Melanopsis* et après avoir eu, comme lui, une histoire assez monotone depuis son apparition en Europe jusqu'à la fin

des temps miocènes, c'est-à-dire jusqu'au moment où une grande émersion du centre européen a refoulé la mer miocène et établi sur le continent un système hydrographique tout nouveau, on voit, à ce moment et presque tout à coup, le genre *Paludina* prendre un développement magnifique et mériter de donner son nom aux couches qui en contiennent d'innombrables débris. Les travaux de M. Neumayr, de M. Brusina, etc., etc., augmentent tous les ans le nombre de ces belles espèces de grandes Vivipares, dont on cherche avec peine les analogues dans les bassins les plus riches de l'Amérique du Nord ou de l'extrême Asie. Le petit lambeau de l'île de Cos ajoute encore à ce catalogue, déjà si long, plusieurs formes nouvelles et intéressantes ([1]).

Ces formes peuvent, en définitive, se réduire à trois principales, celles qui ont été signalées et figurées par Forbes, et ces trois formes peuvent se ramener elles-mêmes à un type premier, lisse, sans carène aucune, qui se rattache intimement à un type connu dans le bassin du Danube, et d'où l'on peut ensuite déduire tout le groupe particulier des Paludines de Cos. C'est un rameau grec d'une tige qui a sa racine ailleurs.

A priori donc, par la seule appréciation des rapports et des différences, sans connaître les observations stratigraphiques de Forbes, on disposerait ces diverses formes de Paludines dans l'ordre suivant : lisses, unicarénées, bicarénées, multicarénées, qui se trouve être, d'après le savant anglais, leur ordre même d'apparition et de succession.

**Paludina (Vivipara) Brusinai**, Neumayr?

(*Pl. III, fig.* 1, 1', 1[a] et 1[b].)

1869. *Vivipara Sadleri* (Partsch, in Neumayr, *Kenntn. foss. Binnenfaun, etc.*).
1874. *Vivipara bifarcinata* (Bielz, in Brusina, *loc. cit., pro parte*).
1874. *Vivipara Brusinæ* (Neumayr, in Brusina, *ibid.*).

C'est la première forme simple, unie, présentant seulement un léger

---

([1]) Il n'est pas hors de propos de rappeler ici que la première espèce très-ornée de grande Paludine fossile qui ait été connue, et qui est restée pendant si longtemps isolée dans la science, provenait précisément des îles grecques et d'une formation d'eau douce dont on ignorait absolument alors l'importance et le véritable horizon; c'est la *Paludina clathrata*, Deshayes, de l'île de Rhodes, publiée, en 1833, dans l'*Expédition scientifique de Morée*, et qui a depuis été retrouvée en Grèce par M. A. Gaudry.

bourrelet vers la suture, figurée par Forbes sous le nom de *Paludina of lowest horizon.* C'est une Paludine du groupe des *P. Sadleri* et *P. bifarcinata*, de la Valachie et de l'Esclavonie; je crois pouvoir la rapporter à l'espèce que M. Neumayr a séparée sous le nom spécial de *V. Brusinai*. Elle abonde dans les calcaires marneux tendres et dans les marnes blanches du nord-est de l'île, et elle varie, en raison même de cette multiplicité, assez sensiblement sous le rapport de la forme générale, qui est plus ou moins courte ou élancée, de la hauteur plus ou moins grande de la spire, du renflement presque nul ou assez prononcé déjà des tours vers la suture, etc. Peut-être y reconnaîtra-t-on plusieurs espèces. Pour moi, je n'y vois que des variétés (j'en fais représenter deux très-opposées (*fig.* 1[a] et 1[b]) d'un type dont le caractère principal, si je ne me trompe, est d'avoir une tendance à s'élargir et à s'aplatir par la base, qui se conservera et s'accusera même dans la plupart des autres Paludines de l'île, comme un caractère de race locale.

### Paludina (Vivipara) sp.?

(*Pl. III, fig.* 2.)

Je ne donne, pas de nom particulier à cette forme, que je considère encore comme se rattachant à l'espèce ci-dessus. Mais je la fais figurer et je la note à part, parce que c'est un individu de transition où l'on voit déjà très-nettement sur le dernier tour deux bourrelets ou carènes, une carène suturale et une autre basale qui mène ainsi aux deux types suivants : d'une part, à la *P. Munieri*, et de l'autre à la *P. Forbesi*.

### Paludina (Vivipara) Munieri, nov. sp.

(*Pl. III, fig.* 4.)

Cette Paludine ne paraît pas être commune à Cos, mais elle se distingue bien de toutes les autres par sa forme droite, plus carrée, moins triangulaire, sa spire bien étagée et son dernier tour fortement renflé à la suture avec une carène médiane mousse et l'indication d'une troisième basale. Le plan de l'ouverture est presque parallèle à celui de l'axe de la coquille.

Cette Paludine ressemble à plusieurs autres de l'Esclavonie, *bifarcinata*, *ambigua*, etc.; je la crois cependant toute particulière.

L'échantillon figuré, de grandeur naturelle, n'a pas été recueilli par M. Gorceix; il appartient à M. Munier-Chalmas, à qui je dédie l'espèce et à qui il avait été remis, il a y longtemps, avec plusieurs autres fossiles d'eau douce de Cos. Il est jaunâtre, brillant et comme vernissé.

**Paludina (Vivipara) Forbesi**, Tournoüer.

(*Pl. III, fig.* 3 et 3[a].)

1875. *Vivipara Forbesi* (Tournouer, *Journal de Conch., loc. cit.*, p. 77).

C'est la seconde espèce figurée par Forbes, *Paludina of the second horizon*. C'est une forme qui paraît bien fixée; M. Gorceix en a recueilli plusieurs échantillons qui sont tous très-semblables entre eux et bien caractérisés. La forme générale est bien conique, bien pyramidale, assise obliquement sur une base large, avec une spire élevée à tours bien scalaires, bien étagés en retrait les uns sur les autres et déprimés à leur partie médiane. Le bourrelet sutural est bien marqué sur les trois derniers tours; le dernier, dilaté vers la base, porte, en outre, une deuxième carène subbasale et l'indication d'une troisième autour de l'ombilic ou plutôt de la columelle.

Je fais représenter (*fig.* 3[a]) un échantillon plus trapu et plus large que les autres, qui semble faire le passage à l'espèce suivante :

**Paludina (Vivipara) Gorceixi**, Tournoüer.

(*Pl. III, fig.* 5, *typus.* 5[a] var.)

1875. *Vivipara Gorceixi* (Tournouer, *Journal de Conch., loc. cit.*, p. 78).

C'est visiblement la troisième forme figurée par Forbes, *Paludina of the uppermost zone*. C'est une espèce très-commune au nord de l'île, d'après la collection de M. Gorceix; plus commune que la *Forbesi*, quoique moins commune que la *Brusinai*. M. Gorceix ne lui a pas assigné de niveau spécial; mais l'aspect de tous les échantillons, leur nature très-solide, le caractère de la marne limoneuse, grossière, sale, qui les remplit, indiquent bien qu'ils appartiennent à une zone ou tout au moins à un gisement particulier, quelle que soit sa hauteur.

C'est la Paludine la plus forte de l'île; son test est singulièrement épais et robuste, fortement sillonné sur le dernier tour et rendu rugueux par les lignes d'accroissement. Le type se distingue du type *Forbesi* par une plus forte taille, des tours de spire moins élevés et moins scalaires, et la deuxième carène du dernier tour plus médiane que dans la *Forbesi*. Les individus typiques m'ont paru nombreux; mais l'espèce donne naissance elle-même à beaucoup de variétés par la multiplication du nombre des carènes du dernier tour, d'où résulte pour celui-ci une forme extérieure assez différente de celle du type. Je fais représenter une première variété (*fig.* 5[a]) où la carène suturale est doublée; et je suis porté maintenant à rattacher à l'espèce, comme fortes variétés, même les formes que j'ai décrites sous le nom de :

**Paludina (Vivipara) Coa** (1), Tournoüer.

(*Pl. I, fig.* 6, 6[a], et 6[b].)

1875. *Vivipara Cosensis* (rectius *Coa*) (Tournouer, *Journal de Conch.*, *loc. cit.*, p. 78).

qui se distinguent du type précédent par le nombre plus considérable de leurs carènes ou bourrelets, et surtout en ce que la carène médiane est ici bien plus rapprochée de la suturale; ce qui donne au dernier tour un aspect plus rond et moins anguleux. Mais rien n'est plus difficile que de déterminer, en pareil cas, la limite de l'espèce et de la variété; et il se pourrait très-bien qu'un plus grand nombre d'échantillons me montrât des passages insensibles entre la *Gorceixi*, la *Coa*, et même la dernière et extrême forme que je fais figurer ici :

**Paludina (Vivipara) trochlearis**, Tournoüer.

(*Pl. III, fig.* 7.)

1875. *Vivipara trochlearis* (Tournouer, *loc. cit.*),

et dont je ne connais qu'un seul échantillon de la collection Munier-Chalmas. C'est une coquille plus légère, plus turriculée, plus élégante

(1) Je trouve dans *Cong. u. Palud-Schicht. Slavon*, (*in fine*) une *Vivipara Coa*, Neumayr, qui est vraisemblablement différente de celle dont il est ici question. (*Note ajoutée pendant l'impression.*)

que les précdentes. Les tours de spire, bicarénés, sont beaucoup plus détachés les uns des autres que dans le type *Gorceixi* et ses dérivés immédiats. Les trois carènes principales du dernier tour sont nettes, étroites et subéquidistantes les unes des autres. L'aspect de la coquille me fait croire qu'elle appartient aux marnes à *Paludina Brusinai* et *Forbesi*.

Ces dernières Paludines multicarénées, la *P. Gorceixi* et ses dérivées, font partie, comme la *P. clathrata* de Rhodes, d'un groupe de formes très-richement ornées et très-nombreuses en Esclavonie, que l'on a rapportées plusieurs fois aux *Tulotoma*, Haldemann, de l'Amérique du Nord, genre créé pour le beau type de la *Paludina magnifica*, Conrad, vivant aujourd'hui dans quelques rivières de l'Alabama et de la Géorgie. Quelle que soit la valeur du genre, le rapprochement des espèces fossiles et de l'espèce américaine peut être contesté; leurs rapports se bornent à la richesse de leur ornementation, mais la forme de l'ouverture est toute différente, etc. On trouvera peut-être des rapports plus directs pour nos fossiles avec les Paludines de l'Asie orientale, quand celles-ci seront mieux connues; on peut citer déjà les *Paludina oxytropis*, Benson, du Bengale; *P. ingallsiana*, Lea; *P. umbilicata*, Lea, etc., de l'Indo-Chine; comme plus voisines à beaucoup d'égards de nos fossiles que les *Tulotoma* américaines.

**Neritina abnormis**, Jenkins? var. *a*.

(*Pl. IV, fig.* 12 et 12[a].)

1864. Jenkins, in *Quarterly Journ. of Science*, p. 413, etc.

C'est une grosse Néritine à spire élevée, à dernier tour quelquefois rond ou subcylindrique, généralement déprimé au milieu avec une carène plus ou moins obtuse, qui descend assez bas sur le tour. (Le dessin représente une carène trop aiguë et ne donne pas une bonne idée de la forme ordinaire de la coquille.) La coquille est ornée de lignes brunes fulgurantes ou quadrillées. La callosité columellaire est forte et très-finement dentée dans les échantillons bien conservés. Dimension : 11-12 millimètres de hauteur sur 9 de largeur. L'espèce est extrêmement commune à Pylli, avec la *Melanopsis Delessei*, etc.

Ce type, annoncé déjà dans le miocène par la *Neritina picta* de Férus-

sac, commune dans les faluns inférieurs de Bordeaux, s'est conservé dans la faune européenne actuelle, dans certains *Neritoconus* de ses parties les plus chaudes de l'Espagne (*N. Valentina*, etc.) et de la Palestine (*N. Jordani*). C'est de cette dernière, c'est-à-dire de l'espèce qui vit encore dans la région la plus voisine des îles grecques, que l'espèce de Cos se rapproche le plus; elle en est probablement l'ancêtre.

**Neritina abnormis**, Jenkins? var. *b*.

(*Pl. IV, fig.* 13.)

Cette forme, beaucoup plus petite que la précédente (6 millimètres de haut sur 6 de large), en est comme la réduction et l'exagération dans ses caractères. La spire est généralement surbaissée, la dépression médiane du dernier tour fortement accusée, d'où résultent une carène plus accentuée et une forme générale plus transverse, plus étalée sur sa base et plus oblique. Le dessin se compose toujours, à ce qu'il m'a paru, de lignes brunes fulgurantes.

Cette Néritine caractérise par son extrême abondance les marnes blanches de Fouka à *Paludina Brusinai* et *Forbesi*, comme l'autre caractérise les argiles brunes de Pylli. Je ne les connais, ni l'une ni l'autre, en Esclavonie ni ailleurs. On trouve vivante en Croatie une *Neritina carinata*, Parreys, qui n'est pas sans analogie avec notre espèce fossile, mais qui s'en distingue cependant, non-seulement par sa taille plus forte et son dessin moins serré, mais encore en ce que le dernier tour, quoique caréné, n'est pas fortement déprimé au milieu comme dans le fossile de Cos. Elle appartient, comme la *N. acuticarinata* de Fuchs, au groupe de la *Danubialis*.

Forbes a représenté trois Néritines de Cos, trois formes successives; mais ses dessins sont si imparfaits, que je ne retrouve pas bien ces trois formes dans les matériaux de M. Gorceix. Des deux que je distingue, quelle est d'ailleurs la plus récente? Je n'en sais rien. Est-ce la variété de Fouka, comme étant la plus fortement carénée et la plus éloignée du type ordinaire du genre?

Je rapporte, comme on le voit, les deux Néritines de Cos à une espèce fossile de la Crète, que le capitaine Spratt déclare être commune aux gisements des deux îles; mais je conserve des doutes sur

l'exactitude de cette assimilation, ne connaissant pas en nature l'espèce très-polymorphe décrite par M. Jenkins (1).

### DREYSSENSIA (Dreissena, Beneden; Congeria, Partsch).

Le genre Dreyssène (Congérie des Allemands) qui, apparu dans le miocène inférieur où il est modestement représenté par quelques petites espèces, a eu un développement si subit et si extraordinaire dans les eaux du centre de l'Europe un peu avant l'ère des Paludines, et qui, tombé tout aussi vite en décadence, n'est plus représenté dans la faune européenne actuelle que par une espèce du Volga, la *D. polymorpha*, dont la propagation et l'acclimatation en Occident est toute récente et extrêmement rapide, le genre Dreyssène est presque absent de la faune de l'île de Cos.

Je ne puis lui rapporter qu'une seule et très-petite espèce, dont je trouve les empreintes couvrant la surface d'un fragment de calcaire blanc, marneux, dur, recueilli par M. Gorceix au-dessous de l'église de Saint-Georges; empreintes associées à celles de la *Neritina abnormis?* et de l'*Hydrobia slavonica?* Ces petites empreintes ne mesurent guère que 7 millimètres de long sur 3-4 de plus grande largeur; elles me permettent seulement une attribution générique de la coquille qui les a laissées; je ne puis pas en déterminer l'espèce, qui me paraît nouvelle à cause de son extrême petitesse.

### UNIO.

De même les Unios qui, dans la faune fossile de l'Esclavonie, le disputent en richesse aux Paludines et aux Mélanopsides et souvent même à leurs congénères actuels des grands bassins hydrographiques de l'Amérique du Nord ou de la Chine (2), ne sont absolument représentés à Cos, d'après les matériaux de M. Gorceix, que par quelques fragments de test, brisés, dans les argiles ligniteuses du col de Pylli.

---

(1) La *Neritina Coa*, espèce nouvelle que je trouve instituée, et non figurée, par M. Neumayr (*Conger. und Palud. Schichten Slavon.*, p. 35), est sans doute la Néritine de Cos, que je rapporte ici provisoirement à l'*abnormis*. (*Note ajoutée pendant l'impression.*)

(2) Voir *Conchyliologie fluviatile de la province de Nanking*, par le R. P. Heude, etc.

C'est le dernier genre que nous ayons à signaler dans cette formation d'eau douce.

En résumé, cette petite faune d'eau douce de l'île de Cos est intéressante à un double point de vue, comme je l'ai dit.

Premièrement, par ses affinités incontestables avec la faune des couches à Paludines de l'Esclavonie et du bassin du Danube, elle nous montre qu'elle n'est qu'un fragment de cette grande faune, aujourd'hui si bien connue, et au point de vue de la géologie géographique, elle nous fait voir la grande extension de ces dépôts qui contournaient le massif isolé des Balkans et de la Grèce et s'étendaient vraisemblablement sur une partie de l'Archipel grec et de l'Asie Mineure. Le lambeau de Cos, heureusement épargné par les phénomènes violents qui ont, depuis, si profondément modifié cette région, se relie sans doute aux terrains d'eau douce de Rhodes, où l'on retrouve la *Melanopsis Sporadum*, avec la *M. nodosa*, var. et la *Paludina clathrata;* aux couches à *P. clathrata* de Kalamaki en Grèce (M. Gaudry); peut-être aux couches de Mégare à *Melanopsis anceps;* à celles de la Lycie, étudiée par Forbes; de la Crète, d'après le capitaine Spratt. Avec ce dernier géologue, je crois que la présence d'Unios et de grandes Paludines atteste l'existence de masses d'eau plus considérables que celles des petits bassins ou des petites lagunes supposés par d'autres auteurs.

En second lieu, par ses différences mêmes avec la faune à Paludines de l'Esclavonie qui ne permettent guère d'identifier les espèces, la petite faune de Cos présente un sujet intéressant d'étude sur le mode d'apparition des espèces et sur le développement d'une faune locale, ou tout au moins régionale. Comparée à celles du bassin du Danube, la faune de Cos porte en effet tous les caractères, tout le faciès d'une faune régionale particulière, comme est, par exemple, dans l'Europe actuelle, la faune à Mélanopsides et à Néritines du sud de l'Espagne. Dans ses trois genres principaux, Paludines, Mélanopsides, Néritines, les espèces présentent une série de modifications parallèles qui les rattachent à une ou deux formes très-simples, considérées comme centre ou comme point de départ : *Paludina Brusinai*, *Melanopsis Sporadum*, *M. Delessei*, *Neritina abnormis*, var. *a*. Le caractère morphologique commun à ces trois types, le caractère des races de Cos, c'est une ten-

dance de la coquille à s'élargir par la base, à s'aplatir, qui est très-sensible.

Ces modifications parallèles ont de plus été successives, d'après les observations stratigraphiques de Forbes, et elles se sont accomplies dans un temps nécessairement restreint, puisqu'il est limité par le dépôt pliocène marin qui surmonte les dépôts d'eau douce. Si ces observations de Forbes sont confirmées, elles donneront un solide appui à la théorie de la descendance des espèces par voie de transformation successive : elles ne sont d'ailleurs que conformes à beaucoup d'autres faits paléontologiques, parmi lesquels je n'en citerai qu'un, pour ne pas sortir des terrains tertiaires, celui des modifications parallèles subies par des types de Cérites (ou plutôt de Potamidées) bien connus : le *C. trochleare* et le *C. plicatum*, dans l'intérieur de la formation des sables tongriens d'Étampes, compris entre le calcaire inférieur de la Brie et le calcaire supérieur de la Beauce.

Quel a été l'agent de ces transformations des coquilles de Cos? Forbes pense que c'est l'introduction successive des eaux salées dans le bassin d'eau douce. Mais cette hypothèse ne me satisfait pas, par la raison, qui me semble péremptoire, que dans le bassin de l'Esclavonie et de la Croatie qui n'a pas été recouvert par la mer pliocène comme celui de Cos, les types de Paludines et de Mélanopsides ont cependant subi des modifications parfaitement comparables à celles des coquilles de Cos, tout en étant éloignées et à l'abri des influences maritimes auxquelles Forbes a eu recours. Le fait a donc beaucoup plus de portée et de généralité que Forbes ne pouvait le supposer, et son explication locale est insuffisante. Dans notre Europe actuelle même, les *Melanopsis Graëllsi* et les *Neritina Valentina*, auxquelles j'ai fait allusion tout à l'heure et dont l'ornementation multicarénée semble modelée sur le même patron à un point singulier, vivent ensemble dans les sources vives de la rivière Los Santos, près d'Alcudia, d'après les renseignements que je dois à M. le professeur Vilanova. D'où leur vient cette ornementation commune? et, pour généraliser, d'où vient à tant de faunes régionales ou insulaires leur faciès, leur physionomie propre? Quel rôle y joue l'influence extérieure du milieu? Ce sont des questions bien complexes et encore bien obscures.

Mais, quelle qu'ait été la cause des modifications subies par les espèces

de Cos dont nous nous occupons, ces modifications ont eu pour résultat de produire des formes très-variées et très-originales, dont les unes, comme les Paludines, se sont absolument éteintes ou ont complétement disparu de nos eaux; dont les autres, au contraire, se sont fixées et ont survécu en Europe dans les régions méridionales, quelques-unes même dans la région orientale et tout près du lieu de leur origine ou de leur apparition. Tel est le cas des *Neritina Jordani*, et même *N. Valentina;* des *Melanopsis nodosa*, *costata*, *cariosa*, dont les ancêtres se retrouvent certainement parmi les fossiles de Cos ou de la Grèce.

### *Espèces de la formation marine.*

La formation marine de l'île de Cos, qui occupe le milieu et l'isthme de l'île depuis les villages de Pylli et d'Antimaki jusqu'au village de Képhalos et qui vient en couches presque horizontales s'appuyer du côté de Pylli sur la formation d'eau douce relevée vers le sud, est très-riche en fossiles. Pour la distribution des espèces dans cette formation, je ne puis que me référer aux indications données dans la Note géologique de M. Gorceix. La partie supérieure de la formation est occupée par un banc de grandes huîtres, *Ostrea lamellosa*, très-développé, surtout autour d'Antimaki. Du côté de Pylli, au contraire, on paraît avoir la base de la formation dans des couches argileuses qui sont au contact des dépôts d'eau douce et qui renferment en très-grande quantité des espèces de Mollusques fluviatiles, comme les *Melanopsis Proteus* et *Neritina abnormis?* mêlées à des espèces marines littorales, comme les *Cardium edule*, *Hydrobia acuta*, *Nassa reticulata* et *Cyclonassa neriteus*, qui est là excessivement abondant. Plus loin, jusqu'au village de Képhalos, la formation marine se développe avec une grande variété d'espèces, qui accuse évidemment des fonds très-différents en rapport avec la configuration du rivage qui a dû lui-même varier beaucoup, selon les oscillations d'un sol très-agité. Il est évident que les *Trochus*, les *Nassa*, les *Cerithium scabrum* et *vulgatum*, les *Cardium edule*, les *Mytilus edulis*, etc., n'ont pas vécu dans les mêmes profondeurs que les *Turritella tornata* ou *tricarinata*, les *Chenopus*, les *Pecten jacobeus*, les *Venus senilis* et *Boryi*, etc. De même, plusieurs variétés intéressantes de la même espèce, que je trouve dans les fossiles de Cos, ont dû vivre

à des niveaux différents. Peut-être une observation plus longue et plus détaillée des dépôts que celle que M. Gorceix a pu faire l'aurait-elle amené à distinguer plusieurs niveaux dans l'épaisseur de la formation; avec les documents déjà fort intéressants qu'il nous a fournis, je ne puis que dresser une liste d'ensemble des espèces que j'ai déterminées.

En dehors des Mollusques, je trouve, parmi ces matériaux, un seul Polypier, *Cladocora cespitosa*, M. Edw., très-commun; un seul Foraminifère, *Rotalina Beccarii*; quelques *Eschara;* un petit *Balanus;* la *Serpula protensa*, L. c. c.; pas de *Brachiopodes* et pas d'*Oursins*.

Les Mollusques sont les suivants (¹) :

ACÉPHALES.

*Gastrochæna*, indét. (un fragment).
*Corbula gibba*, Oliv. — C. c. et tr. belle.
*Syndosmya*, indét. (fragment).
*Mactra subtruncata*, da Costa.
*Donax venusta*, Poli.
*Psammobia Ferroensis*, Chemn.
*Tapes edulis*, Linné? — Tr. jeune.
» *decussatus*. Linn. — Tr. grand (65 millim. sur 45). 2 échantillons.
* » *Dianæ*, Requien. — Belle espèce, représentée par de nombreux échantillons, à tous les âges. Coquille grande, solide, subtriangulaire, côté postérieur allongé et rostré; couverte de sillons concentriques très-serrés. Diam. max. antéro-post., 80 mill.; umbono-ventr., 55.

C'est d'après un échantillon typique de la Corse, de l'ancienne collection Deshayes, conservé aujourd'hui à l'École des Mines de Paris, que je rapporte avec certitude ce *Tapes* de Cos à l'espèce peu connue de Requien. A l'âge moyen, elle ressemble beaucoup au *T. aureus*. Ce fossile se trouve à Rhodes (Muséum de Paris); il semble donc assez caractéristique du Pliocène oriental. Je crois cependant qu'il faut rapporter au *T. Dianæ* le *T. decipiens*, Doderl., de l'Italie.

*Venus verrucosa*, L. — A. r. plus orbiculaire que le type; lamelles concentriques plus serrées, non divergentes du côté postérieur.
* » *senilis*, Brocchi. — Variété *major, late-lamellata*, semblable à la figure donnée par Dubois de Montpéreux (Volh., *Pl. V, fig.* 22, 23).
* *Cytherea Boryi*, Desh. (*multilamella*, Lamk.?) type de Morée! c.
» *rudis*, Poli, c.
*Circe minima*, Montagu, c.
*Lucina borealis*, L.
» *spinifera*, Mont.
*Loripes lacteus*, L.
» *divaricatus*, L.

(¹) Les espèces éteintes sont marquées dans cette liste d'un astérisque.

* *Cardita Ægœa*, nov. sp. — Coquille petite (diam. ant.-post., 15 millim.; umb.-ventr., 13″), trapézoïde, très-inéquilatérale; 18-20 côtes subgranuleuses, à peu près égales à leurs intervalles. — Espèce voisine de la *C. turgida* de Philippi. — Se retrouve fossile à Rhodes? Var. *major* (coll. Muséum).

» *corbis*, Philippi.

*Cardium edule*, L. — Var. *rustica*, grande, très-robuste, à sommets très-élevés. Se retrouve fossile à Sienne, à Monte-Mario, etc. — C. c. c. Est fort voisin du *C. edule* de Suez (*C. isthmicum*, Issel).

» *paucicostatum*, Sowerby.

» *papillosum*, Poli, var. c.

» *exiguum*, Gmel.

*Chama gryphina*, Lamk.

* *Arca pectinata*, Brocchi? — Var. *minor*. Diam. max., 25 mill. de large sur 15 de haut. Peut-être espèce nouvelle, voisine de la petite *A. Breislaki* de Philippi (non Basterot).

*Nucula decipiens*, Phil.?

» *nucleus*, L.

*Leda pella*, L.

» *fragilis*, Chemn.?

*Mytilus edulis*, L.

*Pecten Jacobeus*, L. — Beaux échantillons, du côté de Képhalos.

» *varius*, L. — De grande taille, ibid.

» *glaber*, L. — Ibid.

*Ostrea lamellosa*, Brocchi. — Type et variétés se confondant avec l'*O. edulis*. D'autres échantillons, au contraire, épais, subdeltoïdes, conviendraient sans doute à l'*O. Cyrnusi* de la Corse, si cette espèce de Payraudeau devait être distinguée de la *lamellosa*. Un individu, exceptionnellement étroit et allongé, rappelle beaucoup l'*O. crassissima* du miocène ou la *Virginica* vivante.

GASTÉROPODES.

*Dentalium dentalis*, L. c.

*Dischides bifissus*, S. Wood.

*Calyptræa Chinensis*, L.

*Cylichna cylindracea*, Penn.

*Trochus magus*, L. c.

* » *articulatus*, Phil.? — Variété? plus grande, plus forte; tours moins ronds; suture plus profonde; sillons spiraux plus fins et plus nombreux.

» *Laugieri*, Payr. — Var. *angusta*.

» *exasperatus*, Penn.

» *Adansoni*, Payr. — Var.

* » *Spratti*, Forbes? — Var. plus petite, plus étroite que le type; dernier tour plus arrondi, c. c.

*Clanculus Jussieui*, Payr.

» *corallinus*, Gmel.

*Phasianella pulla*, L.

*Rissoa parva*, da Costa.

*Vermetus arenarius*, L.

*Turritella tricarinata*, Brocc. — Type et variétés, c.

* » *tornata*, Brocc. — Beaux échantillons du côté de Képhalos.

* » *subangulata*, Brocc. — Var., à tours renflés vers la suture, comme dans la *T. gradata*, Menk., du miocène.

* (*Scalaria retusa*, Michelotti. — J'inscris ici cette belle espèce parmi les fossiles de Cos; mais elle n'a pas été recueillie par M. Gorceix. L'individu qui m'a été communiqué appartient à M. Munier-Chalmas, à qui il a été remis avec les Paludines de l'île. Sa gangue paraît volcanique.)

*Natica millepunctata*, L. — C. c.

» *macilenta*, Phil.?

*Chenopus pes pelecani*, L. — C. c. et très-beau.

* » *pes graculi*, Bronn. — Avec le précédent, mais moins commun.

*Cerithium vulgatum*, Brug. — Type et variétés, c. c. c. Avec de très-beaux individus typiques, on trouve à Cos plusieurs belles variétés de cette espèce polymorphe, entre autres une variété se rapprochant beaucoup du *C. varicosum*, Brocc., mais plus fortement côtelée, et une autre se rapprochant au contraire du *C. crenatum*, Brocc., par la finesse de son ornementation.

» *mediterraneum*, Desh.

» *scabrum*, Olivi. — Tr.-gr. et tr.-c.

*Triton corrugatus*, Lam.? (Fragment).

*Murex trunculus*, L. — On trouve à Cos, mais je ne sais si c'est exactement dans les mêmes couches, le *M. trunculus* typique, à spire haute et épineuse, avec l'indication caractéristique d'une légère carène sur le dernier tour à la naissance du canal (V. Bellardi), et une variété qui s'en éloigne beaucoup, courte, ramassée, à côtes longitudinales nombreuses et très-marquées, qui rappelle, sous certains égards, le *M. turonensis*, Duj., des faluns de la Touraine. Cette variété, qui se retrouve, identique ou à peu près identique, à l'état fossile au Pirée, en Syrie, à Chypre (Gaudry), etc., est encore vivante et peut-être plus commune dans le Levant que dans la Méditerranée occidentale. Michelotti a figuré aussi un *M. trunculus* fossile du Piémont (*Monogr. Murex, Pl. III, fig.* 6-7) qui ressemble à celui de Cos.

» *brandaris*, L. — Type et variétés actuelles, avec 1 ou 2 rangs d'épines au canal.

* » *id.?* Var. — Un échantillon unique, remarquable, tout à fait intermédiaire entre le type *trunculus* et le type *brandaris*. Coquille robuste, courte; 7-8 grosses *côtes très-contournées, canal court et oblique* du *trunculus;* avec les deux rangs de tubercules et les côtes continues d'un tour à l'autre du *brandaris*. Parmi les *brandaris* ou *pseudobrandaris* du pliocène qui ont été figurés, celui qui s'en rapproche le plus est celui que Michelotti a représenté dans sa *Mon. Murex, Pl. III, fig.* 8-9.

» *muricatus*, Montagu (*squamulatus*, Brocc.).

*Fusus rostratus*, Olivi.

*Euthria cornea*, L.

*Nassa reticulata*, L. — Type et variétés nombreuses, entre autres une variété grande et à spire proportionnellement très-élevée. C. c.

» *incrassata*, Müller. — Grande forme, c. c.

*Nassa pusilla*, Phil.?
» *semistriata*, Brocchi. — Variété entièrement couverte de sillons transversaux (*an* var. *Castrocarensis* et *cingulata* de Foresti?). C.
» *mutabilis*, L. — Var. (an *N. Bonellii*, Sism.?).
*Cyclonassa neritea*, L. — C. c. c. à Pylli, typique.
* *Columbella scripta*, Bell.? (Fragment).
*Mitra ebenus*, Lamk. — Variété à côtes.
*Conus mediterraneus*, Brug. — De taille ordinaire.

Je ne trouve pas dans les fossiles de M. Gorceix trois espèces mentionnées par Forbes : *Siliquaria anguina*, *Phorus* et *Niso*.

Je n'y trouve pas un seul *Pétoncle*, pas un seul *Pleurotome*, pas une seule *Cancellaire*.

En somme, je reconnais 33 espèces déterminées de Bivalves et 40 de Gastéropodes; total : 73, sur lesquels je compte, tout au plus, 14 ou 15 espèces ou variétés éteintes, c'est-à-dire environ 17 ou 18 pour 100.

D'après ces données, peut-être incomplètes, il est vrai, la faune marine de Cos, qui surmonte les couches à Paludines, serait pour moi, comme pour Forbes, du *pliocène supérieur* et récent, comparée à la faune classique du Piémont et de la Toscane, qui n'est peut-être elle-même déjà que du pliocène moyen. Je ne trouve en effet à Cos : parmi les Gastéropodes, ni grands *Pleurotomes*, ni grands *Cones*, ni *Ficula*, ni *Cancellaires*, ni *Fasciolaires*, ni grands *Fuseaux*, ni grandes *Mitres*, ni *Marginelles*, ni *Terebra*, etc.; et parmi les Bivalves, ni le *Pecten latissimus*, ni le *P. flabelliformis*, ni l'*Arca diluvii*, ni les *Perna*, ni les *Hinnites*, ni la *Dosinia orbicularis*, ni la *Lucina leonina*, ni la *Venus umbonaria*, ni la *V. plicata*, ni la *Cytherea pedemontana*, etc., c'est-à-dire aucune, pour ainsi dire, des espèces caractéristiques du véritable pliocène. Même en faisant la part de l'éloignement et de la différence possible des stations, il serait assez surprenant que les recherches de M. Gorceix, qui ont porté sur une assez grande surface et sur trois ou quatre dépôts différents, n'aient rencontré aucune de ces espèces caractéristiques, si les couches étaient synchroniques.

En Toscane, au contraire, M. Capellini [1] a montré que les « couches à Congéries » que les géologues allemands mettent au-dessous des

---

[1] *La formazione gessosa di Castellina marittima*; 1874, p. 26, etc.

« couches à Paludines » étaient surmontées par les couches marines de l'*ancien pliocène*, dont on rencontre immédiatement les fossiles caractéristiques : *Triton apenninicum*, *Cancellaria lirata*, *Columbella thiara*, *Pleurotoma turricula*, *dimidiata*, *monilis*, *Arca diluvii*, *Pecten flabelliformis*, etc.

De ces données comparées ne peut-on pas conclure que les *couches à Paludines sont l'équivalent d'eau douce de l'ancien pliocène marin ;* et que la mer pliocène, marchant de l'ouest à l'est, a recouvert transgressivement et successivement, d'abord les couches à Congéries de l'Italie ; ensuite, les couches à Paludines de la Grèce et du Levant ?

La formation marine de Cos, comme la formation d'eau douce, n'est qu'un fragment d'une grande formation pliocène orientale, qui est maintenant heureusement à l'étude et qu'il serait prématuré, pour moi, de vouloir reconstituer avec le peu d'éléments dont je dispose. Cependant on peut croire, sans trop s'avancer, que les lambeaux marins de Cos se rattachent intimement à ceux de la côte d'Asie et des îles voisines, à ceux de Rhodes qui en est si près et de Chypre. Or, ce que je connais de la faune marine de ces îles me fait croire que ce pliocène du Levant a un caractère particulier et plus récent que celui d'Italie. Dans le centre de Chypre, M. Gaudry a reconnu des couches pliocènes où les deux tiers des fossiles ont encore leurs analogues vivants et les couches « quaternaires » de la Scala et de Larnaca, à *Strombus coronatus* [cette belle espèce mio-pliocène qui semble s'être partagée en deux branches, dont l'une vit encore sur les côtes occidentales de l'Afrique (*S. bubonius*) et dont l'autre est allée mourir dans le Levant] ne sont peut-être que du pliocène très-récent, comme celui de Monte-Pellegrino près de Palerme, ou de Fauglia près de Pise, qui ne renferment que 9 pour 100 d'espèces éteintes (d'après MM. de Monte-Rosato et Manzoni). A Rhodes, qu'il est impossible de séparer de Cos, on trouve d'après une collection de fossiles du Muséum dont mon ami M. P. Fischer a bien voulu relever le Catalogue, une proportion de 18 ou 20 pour 100 seulement d'espèces éteintes, fort analogue par conséquent à la proportion que me donnent les fossiles de Cos, qui ne s'éloignera probablement pas beaucoup de la vérité. — J'ai relevé, dans l'Expédition scientifique de Morée, la liste des fossiles pliocènes de la péninsule déterminés par Deshayes : là, sur 137 espèces, je n'en trouve pas moins de 50, et même davantage, qui seraient

des espèces perdues : proportion très-forte qui tendrait à faire ranger ces couches dans le pliocène ancien. — Mais dans le dépôt littoral de Calamaki, d'où M. Gorceix a également rapporté des fossiles, je trouve que toutes les espèces sont encore vivantes, sauf une ou deux variétés et sauf une petite *Corbicula* que je crois nouvelle et que je signale ici en passant. Enfin, sur l'îlot de Hyali, exploré par M. Gorceix, je ne vois dans les coquilles des couches émergées absolument que des espèces actuelles. Il y a donc, en Grèce et dans l'Archipel, des dépôts marins pliocènes et post-pliocènes fort variés; mais, pour m'en tenir à ceux de Cos et de Rhodes, je les considère comme du pliocène supérieur.

L'étude des lambeaux tertiaires de l'île de Cos et des fossiles qu'ils contiennent touche nécessairement, comme on le voit, à des questions générales de Géologie et de Paléontologie européennes; et, pour en saisir l'intérêt, il faut se retracer en esprit le cadre général dans lequel cette étude locale doit prendre place. Il faut se rappeler qu'à la fin des temps miocènes il y a eu, en Europe, un lent et vaste mouvement de soulèvement qui paraît avoir eu son centre entre les Alpes, la Crète et le Caucase, et qui a eu pour effet de faire plonger les terres de l'ouest sous l'Océan, d'expulser, au contraire, des régions centrales la mer miocène qui les coupait au nord des Alpes et des Balkans, et de mettre à nu de vastes surfaces dans le bassin de la Méditerranée.

C'est pendant cette période, très-longue sans doute, d'exhaussement continental, que se sont développées successivement, d'abord, la riche faune des couches à Congéries et à *Valenciennesia;* ensuite, la faune non moins riche des couches à Paludines, à Unios et à Mélanopsides, qui ont toutes deux leur centre dans la région du Danube, et qui s'étendent depuis la vallée du Rhône et de la Saône à l'ouest [1] jusqu'à l'Archipel grec et jusqu'à l'Asie Mineure vers le Levant.

Ces belles faunes consécutives supposent un système continental très-différent de ce qu'il était au temps de la mer miocène et de

---

[1] Il est à remarquer qu'on n'a pas encore signalé de Congéries ni de grandes Paludines fossiles en Espagne ni en Algérie, et que, dans cette même province malacologique, il n'y a pas non plus de Congéries ni de grandes Paludines vivantes authentiquement constatées.

ce qu'il a été depuis. Elles supposent beaucoup d'eaux et même de grandes eaux, de vastes bassins hydrographiques, comme ceux de l'Amérique du Nord ou de l'Asie orientale, avec la faune desquels seuls elles sont comparables par les Unios et par les Paludines.

Comme l'ensemble de cette double faune n'a en effet rien de commun, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer ailleurs, avec la faune Africaine, comme ses éléments sont tous ou Européens, ou Asiatiques, ou Nord-Américains, il faut en conclure qu'il y avait dès lors, pour les Mollusques du moins, à la hauteur à peu près du Sahara actuel, une sorte d'*équateur zoologique* qui séparait déjà, comme aujourd'hui, les deux faunes, et qu'au nord de cet équateur s'étendait une immense province géographique et zoologique, reliant peut-être l'Europe, l'Amérique et l'Asie dans un même système naturel; vaste système qui, lui-même, a pris fin par de nouvelles révolutions géologiques et de nouveaux affaissements dans la région atlantique, dans la région méditerranéenne et dans l'océan Pacifique.

C'est alors aussi que les faunes dont nous parlons ont pris fin, ou du moins qu'elles se sont rompues, comme les terres qui les portaient. Les beaux types d'Unios danubiennes ne se retrouvent plus que dans les eaux de l'Amérique du Nord ou dans celles de la Chine. Les grandes Congéries avaient déjà disparu; les belles espèces de Paludines carénées ou tuberculeuses ou côtelées les ont suivies, ou à peu près. L'Europe n'a gardé de ces magnifiques faunes que ses Mélanopsides, une Dreyssène bien modeste, quelques Unios et deux Paludines vulgaires.

La fin de ces faunes se conçoit encore assez bien; mais leur commencement, leur développement, leur évolution si rapide! comment les expliquer? Développements sur place et en sens divers des types indigènes préexistants; isolement des centres anciens; ou bien immigrations, importations de types des centres éloignés; hybridations peut-être; influences locales des milieux différents et changeants; toutes ces causes sans doute ont agi et d'une façon complexe dans la constitution des faunes, mais dans quelles mesures? Et tout cela ne suffit pas encore. Plus profondément que ces causes extérieures, il y a évidemment une cause interne, inaccessible peut-être, qui a produit ce mouvement, cette marche générale des formes organiques dans un certain sens, qui l'a précipité et qui l'a arrêté! C'est le problème de la Vie, ap-

pliqué à l'*espèce* même ou aux unités zoologiques plus élevées que nous appelons *genres* ou *familles;* unités qui ont toutes leur histoire; qui naissent, grandissent et meurent; qui vivent, en un mot, d'une vie aussi certaine, aussi manifeste que la vie de l'*individu,* aussi mystérieuse et aussi inexplicable qu'elle.

## EXPLICATION DES PLANCHES.

### PLANCHE III.

Fig. 1. — *Paludina* (*Vivipara*) *Brusinai,* Neumayr? Type de Cos, jeune et adulte.
Fig. 1ᵃ. — » var. *brevis.*
Fig. 1ᵇ. — » var. *angusta.*
Fig. 2. — » var. *carinata.* Forme de transition à *P. Forbesi.*
Fig. 3. — *Paludina Forbesi,* Tournoüer. Type.
Fig. 3ᵃ. — » variété.
Fig. 4. — *Paludina Munieri,* Tournoüer.
Fig. 5. — *Paludina Gorceixi,* Tournoüer. Type.
Fig. 5ᵃ. — » variété.
Fig. 6. — *Paludina Coa,* Tournoüer. Simple variété de *P. Gorceixi?*
Fig. 6ᵃ et 6ᵇ. — » variétés.
Fig. 7. — *Paludina trochlearis,* Tournoüer.

### PLANCHE IV.

Fig. 1. — *Limnæa Coa,* Tournoüer.
Fig. 2. — *Pyrgula? Brusinai,* Tournoüer.
Fig. 3. — *Melania tuberculata,* Müller.
Fig. 4 et 4ᵃ. — *Melanopsis Sporadum,* Tournoüer.
Fig. 5. — *Melanopsis Gorceixi,* Tournoüer. Type.
Fig. 5ᵃ. — » var. *plicata.*
Fig. 6, 6ᵃ, 6ᵇ, 6ᶜ. — *Melanopsis Proteus,* Tournoüer.
Fig. 7 et 7ᵃ. — *Melanopsis Ægæa,* Tournoüer. Type et variété.
Fig. 8. — *Melanopsis costata,* Férussac.
Fig. 9. — *Melanopsis cariosa,* Linné.
Fig. 10. — *Melanopsis Delessei,* Tournoüer. Type, jeune et adulte.
Fig. 10ᵃ, 10ᵇ. — » variétés.
Fig. 11. — *Melanopsis,* sp.?
Fig. 12, 12ᵃ. — *Neritina abnormis,* Jenkins? var. *a.*
Fig. 13. — » var. *b.* De grand. nat. et grossie.

# *ERRATA.*

TOME IV (1875).

Page 149, ligne 7, *au lieu de* soit représentée par la formule, etc., *lire* soit représentée par $zdu$, $z$ étant donné par la formule, etc.

Page 149, ligne 8, formule (2), *au lieu de* $e^{\frac{\beta x}{2}} - e^{-\frac{\beta x}{2}}$, *lire au dénominateur* $e^{\frac{\beta x}{2}} + e^{-\frac{\beta x}{2}}$.

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME CINQUIÈME.


Pages.

Recherches sur la cristallisation des solutions sursaturées (deuxième Mémoire); par M. *D. Gernez* ..... 9

Conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, et renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes; par M. *J. Collet* ..... 49

Études relatives à la décomposition des sels métalliques sous l'influence de l'eau (première Partie); par M. *Alfred Ditte*, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen ..... 83

Rendement des machines thermiques; par M. *J. Bourget*, Directeur de l'École préparatoire de Sainte-Barbe. (Mémoire présenté à l'Institut.) ..... 111

Études sur le magnétisme (deuxième Partie). Étude de l'aimantation de l'acier par les courants; par M. *E. Bouty*, Docteur ès sciences ..... 123

Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications; par M. *Désiré André*. 155

La théorie atomique et la loi des proportions multiples; par M. *H. Sainte-Claire Deville*, Membre de l'Institut, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. 199

Aperçu géologique sur l'île de Cos; par M. *Gorceix*, ancien Membre de l'École française d'Athènes ..... 205

De la distribution du magnétisme libre sur des plaques d'acier elliptiques ou circulaires; par M. *E. Duter* ..... 217

Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide; par M. *P. Appell*, Élève à l'École Normale supérieure ..... 245

Étude de la diffraction dans les instruments d'Optique; son influence sur les observations astronomiques; par M. *Ch. André*, ancien Élève de l'École Normale, Astronome adjoint de l'Observatoire de Paris ..... 275

Exposition de la méthode de M. Gyldén, pour le développement des perturbations des comètes; par M. *Baillaud* ..... 355

Pages.

Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce; par M. *Elliot*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Nancy..... 399

Étude sur les fossiles tertiaires recueillis par M. Gorceix dans l'île de Cos, en 1873; par M. *Tournouër*..... 445

## PLANCHES.

PLANCHES I, II, III. — Aperçu géologique sur l'île de Cos, par M. Gorceix.

PLANCHES IV et V. — Étude sur les fossiles tertiaires recueillis par M. Gorceix dans l'île de Cos, en 1873, par M. Tournouër.

2451 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
153314 Quai des Grands-Augustins, 55

Imprimé en France